Soluciones.

3.1. Prueba individual. Nivel I.

1. Igualando las sumas de los números en los hexágonos:

$$a + b + c + 9 + 2 + 0 = b + c + 1 + 7 + 5 + 4$$

se obtiene $a = 6$ y como se deben usar todos los dígitos, tenemos que b y c son 3 y 8 en algún orden. Por tanto $b + c - a = 3 + 8 - 6 = 5$.

R: 5

2. Como $e + 1 = 7$, entonces $e = 6$. Luego, como $m + 3 = 1$, necesitamos que $m = 8$. Esta última operación, nos acarrea 1 para la suma de los dígitos de las centenas, por lo cual $m + b + 1$ debe dar como resultado 0. Como m vale 8, entonces b debe valer 1. Finalmente esta última suma acarrea un 1 a los millares, por lo tanto $o + 1 = 2$ y $o = 1$. Así, $o + m + m + e + b = 1 + 8 + 8 + 6 + 1 = 24$.

R: 24

3. Durante los primeros 4 días, Víctor y Vicky, juntos se comieron

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) + \left(\frac{1}{128} + \frac{1}{256}\right) = 1 - \frac{1}{256}$$

Por lo tanto, en el día 5 Víctor comió $\frac{1}{256}$ de pastel. Así, durante los 5 días, Víctor comió

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{128 + 32 + 8 + 2 + 1}{256} = \frac{171}{256}$$

del pastel.

R: $\frac{171}{256}$

4. Contemos las sublistas que no contienen a 2, 3, 5 o 7. Estas se conforman con los restantes 5 dígitos, y por tanto tenemos 2^5 de ellas. El total de sublistas es $2^5 - 1 = 31$, ya que el conjunto vacío no genera ninguna sublista.

R: 31

5. Sean $x = BC = GH = CD/2$ y $y = HA = AB = DE = EF$. Así, el perímetro total de la figura es $6x + 4y$. Por otro lado, $2x + 3y = 8$ y $8x + 2y = 10$. Por lo tanto la respuesta es

$$2x + 3y + \frac{8x + 2y}{2} = 8 + 5 = 13$$

R: 13

6. Como
$$\frac{268}{187} = 1 + \frac{81}{187} = 1 + \frac{1}{\frac{187}{81}}$$
se tiene que $a = 1$ y
$$b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e+1}}} = \frac{187}{81} = 2 + \frac{25}{81}$$
por lo que $b = 2$ y
$$c + \frac{1}{d + \frac{1}{e+1}} = \frac{81}{25} = 3 + \frac{6}{25}$$
luego $c = 3$ y
$$d + \frac{1}{e+1} = \frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}$$
por lo que $d = 4$ y $e = 5$. Así $a + b + c + d + e = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

R: 15

7. Sea x el número de cifras eliminadas. Como a cada hoja arrancada le corresponden dos páginas, una terminada en cifra 7 y la otra en cifra 8, se eliminan $x/2$ cifras con las páginas terminadas en 8. Analicemos las páginas con numeración terminada en cifra 8, para encontrar la última hoja arrancada:
$$8, 18, 28, 38, \cdots, 98; 108, 118, 128, 138, 148, 158, 168, 178, 188, 198; 208, 218, \cdots, 998$$
Vemos que hasta el 98, inclusive, se han eliminado 19 cifras, así que las restantes $\frac{x}{2} - 19$ cifras se eliminarán de 3 en 3, es decir, el número de hojas que faltan por arrancar es la tercera parte de $\frac{x}{2} - 19$, siempre y cuando $\frac{x}{2} - 19 \leq 270 = 30 \times 9$, antes de empezar con la hoja donde está el 1008. Luego la última hoja que se arranca está numerada con N y
$$\frac{N - 108}{10} + 1 = \frac{\frac{x}{2} - 19}{3},$$
$$N = \frac{5}{3}(x - 38) + 98$$
Así que el máximo número de páginas del libro será
$$N + 8 = \frac{5}{3}(x - 38) + 106$$
Para el caso $x = 230$, $N = 418$ y el máximo número de páginas $N + 8 = 426$.

R: 426

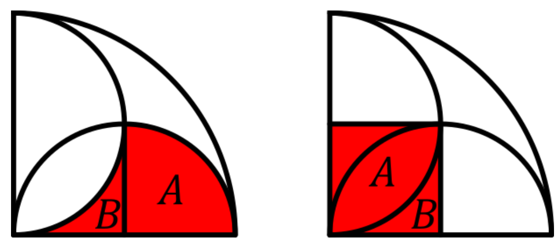
8. Notemos que $\measuredangle BAG = 90°$ y $\measuredangle BAE = 180° \times \frac{3}{5} = 108°$. Por tanto $\measuredangle EAG = 18°$. Además, $GA = AB = AE$ y por tanto $\triangle EAG$ es isósceles. Así $\measuredangle GEA = (180° - 18°)/2 = 81°$ y $\measuredangle GED = 108° - 81° = 27°$

R: 27°

9. Notemos que el número es $10^{2\times 2018}+2\times 10^{2018}+1=(10^{2018}+1)^2$. Su raíz cuadrada es $10^{2018}+1$ que tiene 2017 ceros.

R: 2017

10. Observemos la siguiente figura.



La región B tiene un área igual a $1-\pi/4$, en tanto que la región A tiene un área igual a $\pi/4$. Así, la región sombreada tiene un área igual a $2(A+B)=2$. Por tanto, el área de toda la figura es $4\times 2=8$.

R= 8

11. Podemos hacer una tabla para llegar al resultado. Si cada uno hubiera recortado 15 círculos, tendríamos lo siguiente:

Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90

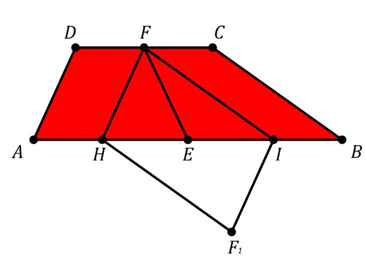
Si continuamos la tabla podremos llegar al resultado

Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90
16	14	128	84
17	13	136	78
18	12	144	72

y podemos ver que María recortó 18 círculos.

R: 18

12. Sea $ABCD$ el trapecio con $AB=18$, $CD=8$, $DA=6$ y $BC=8$. Si E y F son los puntos medios de las bases AB y CD respectivamente, hay que calcular la longitud de EF. Trazando FH y FI, paralelas a DA y BC se forman dos paralelogramos, luego $AH=DF=4=FC=IB$, entonces $HI=18-8=10$, $FH=DA=6$ y $FI=BC=8$.
Observemos que HFI es un triángulo rectángulo, ya que $FH^2+FI^2=HI^2$. Como E es el punto medio de la hipotenusa, entonces $FE=HE=EI=5$.



Otra posible solución considera la ley del paralelogramo: si prolongamos la mediana hasta F_1, donde $FE = EF_1$, obtenemos el paralelogramo FHF_1I y por tanto

$$FF_1{}^2 + HI^2 = 2FH^2 + 2FI^2,$$

$$FF_1{}^2 = 2FH^2 + 2FI^2 - HI^2 = 72 + 128 - 100 = 100,$$

$$FE = \frac{FF_1}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$$

R: 5

13. Sea n un número de dos dígitos tal que $3 \times n = aaa = 111 \times a = 3 \times 37 \times a$, para algún dígito $a \neq 0$. Podemos notar que lo anterior es equivalente a tener que $n = 37 \times a$ pero como n es un número de dos dígitos, a sólo puede ser 1 o 2 y por ende n puede tener únicamente dos valores. Así el resultado es 2.

R: 2

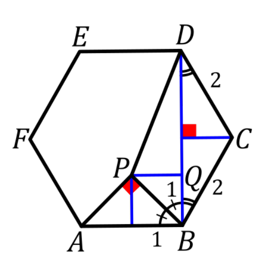
14. Si *abcde* es un número de cinco dígitos que cumple lo anterior debemos tener que

$$b = \frac{a+c}{2}, \quad d = \frac{c+e}{2}, \quad c = \frac{b+d}{2}$$

lo que implica que a, c y e deben tener la misma paridad. Sustituyendo b y d en $c = \dfrac{b+d}{2}$, obtenemos que $c = \dfrac{a+2c+e}{4}$ y por lo tanto $c = \dfrac{a+e}{2}$. Ahora notemos que al encontrar a, e distintos con las propiedades anteriores obtendremos un número del tipo buscado pues es fácil ver que como a, e son distintos entonces los números a, e, $c = \dfrac{b+d}{2}$, $b = \dfrac{a+c}{2}$, $d = \dfrac{c+e}{2}$ son distintos. Si a, e son pares las únicas parejas que cumplen con las propiedades anteriores son $(2,6)$, $(4,8)$ y sus permutaciones. Si a, e son impares las parejas buscadas son $(1,5)$, $(1,9)$, $(3,7)$, $(5,9)$ y sus permutaciones. Entonces hay $6 \times 2 = 12$ números que cumplen las condiciones.

R: 12

15. Como $DC = BC = 2$ y $\measuredangle DCB = 120°$ tenemos por el teorema de Pitágoras que $DB = 2\sqrt{3}$. Sea Q el pie de la altura de P a DB, entonces BQ es igual a la altura desde P a AB.



Dado que $\triangle APB$ es rectángulo e isósceles, dicha altura mide 1 y por lo tanto $QB = 1$. Esto implica que $DQ = 2\sqrt{3} - 1$ y de nuevo por el teorema de Pitágoras $DP^2 = 1 + (2\sqrt{3} - 1)^2 = 2(7 - 2\sqrt{3})$.

R: $2(7 - 2\sqrt{3})$

3.2. Prueba individual. Nivel II.

3.2.1. Parte A

1. Coincide con el Problema 3 de Nivel I.

2. Coincide con el Problema 4 de Nivel I.

3. Notemos que $\measuredangle IAB = \frac{180°\times 3}{5} = 108°$ y $\measuredangle FAB = \frac{180°\times 4}{6} = 120°$. Por tanto $\measuredangle FAI = 12°$. Además, $IA = AB = AF$ y por tanto $\triangle FAI$ es isósceles. Así $\measuredangle IFA = \frac{180°-12°}{2} = 84°$ y $\measuredangle IFE = 120° - 84° = 36°$

   R: $36°$

4. Coincide con el Problema 13 de Nivel I.

5. Notemos primero que dicho producto debe ser un número primo y sólo puede ser 2, 3 ó 5. Sea p alguno de estos primos, luego en los otros dos tiros se debió obtener un 1, y lo que varía es en cuál tiro salió el primo p, por lo que para cada primo tenemos 3 opciones: $p\times 1\times 1$, $1\times p\times 1$ y $1\times 1\times p$. Como hay 3 primos válidos, entonces la cantidad de tiros "favorables"son $3\times 3 = 9$, de un total de $6\times 6\times 6 = 6^3 = 216$ resultados posibles. Luego la respuesta es $\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

   R: $\dfrac{1}{24}$

6. Coincide con el Problema 15 de Nivel I.

7. Notemos que para obtener x^{2016} como término en la multiplicación de binomios, debemos elegir a la x en 2016 de los binomios multiplicados y uno de los números de exactamente 1 paréntesis. Entonces cada uno de los números en los paréntesis aparecerá exactamente una vez multiplicando al término x^{2016}, es decir,

   $$1x^{2016} + 2x^{2016} + 3x^{2016} + \cdots + 2017x^{2016} = (1+2+3+\cdots+2017)x^{2016},$$

   por lo tanto el coeficiente de x^{2016} es equivalente a la suma $1+2+3+\cdots+2017$. Usando la fórmula de Gauss, la suma es igual a $1+2+3+\cdots+2017 = 2017\times 2018/2 = 2017\times 1009$.

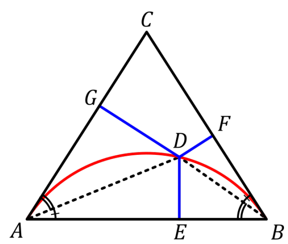
   R: $2017\times 1009 = 2,035,153$

8. Coincide con el Problema 14 de Nivel I.

9. Notemos que desde el 50 hasta el 59 hay 9 números de 2 cifras, que en total aportan 18 cifras. Así desde 50 hasta 99 hay 45 números de 2 cifras y en total se escriben 90 cifras. Además, desde el 100 hasta el 199 hay 81 números de 3 cifras, que en total aportan 243 cifras. Así desde el 100 hasta el 999 hay $8\times 81 = 648$ números de tres cifras y en total se escriben 1944 cifras. Por tanto del 50 al 999 se escriben $90 + 1944 = 2034$ cifras. Para encontrar la cifra en la posición 2017, hay que regresar del 999 hacia atrás 17 cifras, . . . **9**94995996997998999. Por lo tanto, la cifra 9 ocupa el lugar 2017.

R: 9

10. Los triángulos rectángulos AED y BFD son semejantes porque el ángulo semi-inscrito CBD es igual al ángulo inscrito BAD, entonces
$$\frac{DE}{AD} = \frac{DF}{DB} \Rightarrow DE = DF \times \frac{AD}{DB}.$$
De manera análoga, los triángulos BED y AGD son semejantes. Entonces
$$\frac{DE}{DB} = \frac{GD}{AD} \Rightarrow DE = GD \times \frac{DB}{AD}.$$



Multiplicando estas relaciones vemos que DE es la media geométrica de DF y GD:
$$DE^2 = \left(DF \times \frac{AD}{DB}\right)\left(GD \times \frac{DB}{AD}\right) = (DF)(GD) = 4 \times 9 = 36$$
.

R: 6 **cm**

11. Sean $A = 111444444$, $B = 444111111$ y $x = 333$. Podemos notar que $A = 334668x$ y $B = 1333667x$ por lo que el máximo común divisor de A y B es múltiplo de x. Además $d = MCD(334668, 1333667)$ debe dividir a $4 \times 334668 - 1333667 = 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ pero 1333667 no es múltiplo de 5, 7, 11 o 13 por lo que 5005 es primo relativo con 1333667 y así $d = 1$. Por tanto, $MCD(A, B) = x = 333$.

R: 333

12. Como $x \geq 1$, entonces $x^3 = 2017x + 360$ implica que $x^3 \geq 2017 + 360 = 2377$. Esto a su vez implica $x \geq 14$ ya que $13^3 = 2197$. Por otro lado, $x^2 = 2017 + \dfrac{360}{x}$ de modo que
$$44^2 = 1936 < 2017 \leq x^2 \leq 2017 + \frac{360}{14} < 2017 + 26 = 2043 < 46^2 = 2116.$$
La única opción que le queda es $x = 45$. Luego comprobamos
$$45^3 - 2017(45) - 360 = 45(45^2 - 2017) - 360 = 45(2025 - 2017) - 360 = 45(8) - 360 = 0.$$
Por lo tanto concluimos que $x = 45$ es la única solución entera positiva para esta ecuación.

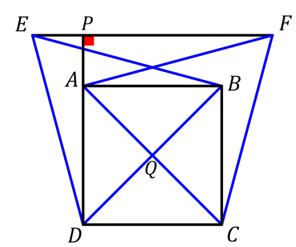
R: 45

3.2.2. Parte B

1. Como $100 = 2^2 \times 5^2$, la cantidad de primos relativos con 100 es $100 - 50 - 20 + 10 = 40$. Ahora notemos que si $1 \leq n \leq 50$ es primo relativo con 100, entonces $100 - n$ también lo es. Según el argumento anterior podemos agrupar los primos relativos en parejas $(n, 100 - n)$ tales que cada pareja suma 100, y como 50 no es primo relativo con 100, entonces podemos dividir los números de forma exacta en $\frac{40}{2} = 20$ parejas. Por tanto la respuesta es $20 \times 100 = 2000$.

2. Notemos que los números menores a 10^4 tienen a lo más 4 dígitos. Si los dígitos no se repiten, tenemos $9 + 9\times 9 + 9\times 9\times 8 + 9\times 9\times 8\times 7 = 9 + 81 + 648 + 4536 = 5274$ números balanceados. Si un dígito se repite, entonces todos los dígitos se repiten (de otra forma no sería balanceado). En el caso en que cada dígito está dos veces y ninguno es cero, tenemos $\binom{9}{2}$ formas de escoger los dígitos y $\binom{4}{2}$ formas de acomodarlos (si nuestro número es de 4 dígitos). Por otro lado, si consideramos las parejas de dígitos que contienen al cero, estas son 9 y hay solo 3 opciones para acomodar las parejas, dado que el 0 no puede ir al principio del número. Por tanto en este caso hay $\binom{9}{2}\binom{4}{2} + 9 \times 3 = 216 + 17 = 243$. Si nuestro número es de dos dígitos tenemos solamente 9 opciones. Por tanto en este caso tenemos $243 + 9 = 252$ números. Si los números se repiten 3 o 4 veces tenemos $9 \times 2 = 18$ números, pues para cada uno de los 2 casos se tienen 9 posibilidades. Por tanto, en total contamos $5274 + 252 + 18 = 5544$ números balanceados.

3. Sean P el punto de intersección de AD con EF y Q el centro del cuadrado.



Notemos que

$$[DCFE] = \frac{PD(DC + FE)}{2} \text{ y } [ABFE] = \frac{PA(AB + FE)}{2} = \frac{PA(DC + FE)}{2}.$$

Entonces

$$\frac{[DCFE]}{[ABFE]} = \frac{PD(DC + FE)}{PA(DC + FE)} = \frac{PD}{PA}.$$

Es fácil ver que C, A, E son colineales al igual que D, B, F. Además, por simetría tenemos que AB es paralela a EF. Por tanto $\measuredangle DPF = \measuredangle DAB = 90^\circ$ y $\measuredangle DBA = \measuredangle DFP = 45^\circ$. Así $PD = PF$ y $2PD^2 = PD^2 + PF^2 = DF^2$. Por tanto $PD = \frac{DF}{\sqrt{2}}$. Como $\triangle AFC$ es equilátero y $AC = 2$ tenemos que $FQ = \sqrt{3}$ y por tanto $DF = 1 + \sqrt{3}$, $PD = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$ y

$$PA = PD - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

Entonces

$$\frac{[DCFE]}{[ABFE]} = \frac{PD}{PA} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$

3.3. Prueba individual. Nivel III.

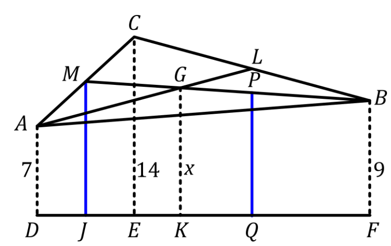
3.3.1. Parte A

1. La descomposición en primos de 10! es 2^8 es $2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Los divisores impares de 10! deben ser entonces divisores de $3^4 \times 5^2 \times 7$. Como hay $5 \times 3 \times 2 = 30$ de estos divisores, la probabilidad buscada es $30/270 = 1/9$

   R: $\dfrac{1}{9}$

2. Sean D, F, E, K las proyecciones respectivas de A, B, C, G sobre la recta. Los segmentos DA, EC y FB son paralelos, formando varios trapecios. El baricentro G es el punto de intersección de las medianas AL y BM, así que la distancia que se busca es $GK = x$. Sea P el punto medio de GB y sean J y Q las proyecciones de M y P sobre la recta. Entonces x será la línea media del trapecio $MJQP$,

$$x = \frac{MJ + QP}{2}.$$



   Notemos que MJ es la línea media del trapecio $ADEC$, entonces $MJ = (7+14)/2 = 21/2$. Análogamente, QP es la línea media del trapecio $GKFB$ ya que $GB = 2GM$. Entonces $PQ = (9+x)/2$. Sustituyendo

$$x = \frac{\frac{21}{2} + \frac{9+x}{2}}{2} = \frac{30+x}{4}.$$

   Resolviendo obtenemos $x = 10$.

   R: 10

3. Coincide con el Problema 9 de Nivel II.

4. Coincide con el Problema 11 de Nivel II.

5. Coincide con el Problema 5 de Nivel II.

6. Coincide con el Problema 7 de Nivel II.

7. Coincide con el Problema 10 de Nivel II.

8. Coincide con el Problema 12 de Nivel II.

9. Para cada $1 \leq k \leq 2017$, un subconjunto $\mathcal{A}$ que contiene a k se puede expresar de la forma $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \{k\}$ donde $\mathcal{B}$ es un subconjunto que no contiene a k. Como hay 2^{2016} subconjuntos $\mathcal{B}$, entonces el número k aparecece 2^{2016} veces como sumando en $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Así la suma de todos los conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ es igual a

$$2^{2016}(1+2+3+\cdots+2017) = \frac{2^{2016} \times 2017 \times 2018}{2} = 2^{2015} \times 2017 \times 2018$$

Dado que hay en total 2^{2017} subconjuntos, la probabilidad buscada es

$$\frac{2^{2015} \times 2017 \times 2018}{2^{2017}} = \frac{2017 \times 1009}{2}$$

R: $\dfrac{2017 \times 1009}{2}$

10. Sean $x^2 = abc$ y $y^2 = cba$. Entonces tenemos $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 99(a-c)$. En consecuencia, si $x \neq y$, 99 divide al producto $(x+y)(x-y)$. Como los cuadrados deben ser números de tres cifras y $31^2 = 961$, entonces tenemos que $10 \leq x, y \leq 31$. Entonces $21 \leq x+y \leq 61$ y $1 \leq x-y \leq 21$. Por tanto tenemos dos casos: *(1)* $x+y = 27, 36, 45, 54$ y $x-y = 11$, *(2)* $x+y = 33, 44, 55$ y $x-y = 9, 18$. El caso *(1)* no arroja soluciones, en tanto que el caso *(2)* nos da $x^2 = 21^2 = 441$ y $x^2 = 31^2 = 961$. Por otro lado, si $x = y$ entonces $a = b$ y tenemos las soluciones $x^2 = 11^2 = 121$, $x^2 = 22^2 = 484$ y $x^2 = 26^2 = 676$. Finalmente, si un número a ponerlo al revés no tiene 3 cifras entonces el número original termina en 0, así que es divisible entre 10 y por tanto entre 100. Aquí las soluciones son $x^2 = 10^2 = 100$, $x^2 = 20^2 = 400$ y $x^2 = 30^2 = 900$.

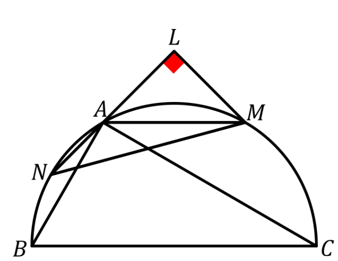
R: $144, 169, 441, 961, 121, 484, 676, 100, 400, 900$

11. Para minimizar el producto de los boletos, basta considerar los 6 números más pequenos que cumplan las condiciones del problema, lo cual implica que dichos números deberán estar formados por parejas de los 4 números primos más pequeños, sin contar al 5 (ya que $\binom{4}{2} = 6$). Así los números se formarán tomando parejas del conjunto $\{2, 3, 7, 11\}$, por lo que el producto de ellos será $2^3 \times 3^3 \times 7^3 \times 11^3 = 462^3$. El siguiente arreglo muestra una posible disposición de los números

Pasajero	1	2	3	4	5	6
Boleto	$2 \times 7 = 14$	$3 \times 11 = 33$	$2 \times 3 = 6$	$7 \times 11 = 77$	$2 \times 11 = 22$	$3 \times 7 = 21$

R: 462^3

12. Considera L el pie de la altura desde M sobre AN.



Como N y M son puntos medios de los arcos AB y AC, entonces $\measuredangle MNA = 30°$ y $\measuredangle AMN = 15°$. Por lo tanto $\triangle MNL$ es rectángulo de $30° - 60° - 90°$ y $\triangle LAM$ es rectángulo isósceles. Por otro lado, $\measuredangle MCA = 30° = \measuredangle ACB$. Así $AB = AM = 1$, entonces $\triangle LAM$ tiene hipotenusa 1, lo cual implica que $LM = 1/\sqrt{2}$. Luego $LN = \sqrt{3}/\sqrt{2}$ y

$$[ANM] = [LMN] - [LAM] = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

R: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

3.3.2. Parte B

1. Coincide con el Problema 3 de Nivel II.

2. Supongamos que los tres números son primos. Si uno de ellos fuera par, digamos $a = 2$, luego b y c son impares, luego $b+c+bc$ es impar, y no es posible que $a|b+c+bc$, por lo que ninguno de los números puede ser par. Como $a|(a+1)(b+1)(c+1)-1$, $b|(a+1)(b+1)(c+1)-1$, $c|(a+1)(b+1)(c+1)-1$ y a, b, c son primos, entonces $abc|(a+1)(b+1)(c+1)-1$. Sin embargo

$$1 < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)-1}{abc} < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc} = \frac{a+1}{a} \times \frac{b+1}{b} \times \frac{c+1}{c} \leq \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} < 2$$

   por lo que abc no divide a $(a+1)(b+1)(c+1)-1$, lo cual es una contradicción. Luego alguno de los números a, b, c no puede ser primo.

3. Supóngase que M tiene más de 3 divisores primos, entonces, tendría cuando menos $2 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, una contradicción, por lo que M debe tener a lo mucho dos divisores primos, y siendo este el caso es fácil ver que M es de una de las siguientes formas p^5 ó p^2q.

Caso (1): $M = p^5$. En este caso la suma de los divisores de M es $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$: Si $p \leq 5$ entonces el lado izquierdo es mayor que el lado derecho, si $p = 2, 3$ tampoco se da la igualdad, por lo que no hay soluciones en este caso.

Caso (2): $M = p^2q$. En este caso los divisores son $1, p, p^2, q, pq, p^2q$ y su suma puede ser escrita como: $(p^2 + p + 1)(q+1) = 3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$. Pero p^2+p+1 es siempre impar, luego $q+1$ debe ser par y q es impar. Supóngase que $q + 1 = 4k$ entonces tenemos que $k(p^2 + p + 1) = 5^3 \times 7$. Analizando las congruencias módulo 5, notamos que p^2+p+1 no puede ser múltiplo de 5, luego debe ser 1 o 7, resolviendo estos dos casos, concluimos que el único valor valido para p es $p = 2$, por lo que $k = 125$ y $q = 4 \times 125 - 1 = 499$ que es también primo. Luego el único valor posible para M es $22 \times 499 = 1996$.

3.4. Prueba por equipos. Nivel I.

1. Consideremos el pensamiento de Toño. Como Toño puede pagar con 3 monedas y que le regresen cambio, entonces a lo más, la cantidad que tiene que pagar es 30. Ahora, podrían regresarle el cambio con 2 monedas, por lo tanto la diferencia con esas 3 monedas que pagó es al menos 2 pesos. Por lo tanto la cantidad a lo más es 28 pesos. Si paga con 3 monedas ninguna de ellas puede ser de 1 o 2 pesos porque la cantidad que le regresarían es al menos 2 pesos, volviendo innecesaria la moneda de 1 o 2 pesos. Por lo tanto en el primer pensamiento de Toño, pagó sólo con monedas de 10 y 5 pesos. Analizemos primero el caso donde se usan

3 monedas de 10 pesos. El cambio puede darse usando a lo más una moneda de 5 pesos (si se usan dos se vuelve innecesaria una de 10 pesos). Si se utiliza, el cambio será 6 o 7 pesos y la cantidad a pagar sería 24 o 23 pesos. Si no se utiliza, el cambio será 2, 3 o 4 pesos, y la cantidad a pagar sería 28, 27 o 26 pesos. Si se usa al menos una moneda de 5 pesos, en el cambio sólo podrán utilizarse monedas de 1 y 2 pesos, pues de lo contrario la moneda de 5 pesos se volvería innecesaria, en este caso el cambio se dará sólo con monedas de 1 o 2 pesos y deberá ser 2, 3 o 4 pesos. Tres monedas de 5 pesos: La cantidad a pagar sería 13, 12 u 11 pesos. Dos monedas de 5 pesos y una de 10 pesos: La cantidad a pagar sería 18, 17 o 16. Una moneda de 5 pesos y dos de 10 pesos: La cantidad sería 23, 22 o 21 pesos.

2. Como empieza en el 6, después de 2 saltos debería llegar al 16 que es potencia de 2, por lo tanto regresa al 14. Notemos que va saltando de par a impar y viceversa siempre que no caiga en una potencia de 2, pero cada dos saltos es que va de par en par con diferencia de 10. Entonces, la siguiente potencia de 2 en la que caerá es la siguiente cuya cifra de las unidades sea igual a 4, es decir, el 64, al cual llega después de $(64 - 14)/5 = 10$ saltos. En este punto regresa al vértice 62 y no volverá a caer en una potencia de 2 hasta la siguiente que termine en 2, es decir la 512 a la cual llega después de $(512 - 62)/5 = 90$ saltos. Aquí regresará al vértice 510 y no caería en potencia de 2 de nuevo en esta vuelta porque no hay potencias de 2 que terminen en 0. Por lo tanto, la primera vez que supere el 1, es cuando salte desde el 2015, es decir con $\frac{(2020-510)}{/}5 = 302$ saltos más. Por lo tanto la pulga necesitó de $2 + 10 + 90 + 302 = 404$ saltos.

3. La sucesión $3, 5, 7\ldots$ corresponde a la de los números impares a partir del 3, es decir, $\{2n+1, n = 1, 2, 3\cdots\}$. Ahora veamos como localizamos el número que cierra cada cuadrado, para pasar del primer cuadrado le añadimos 3 cuadrados, del segundo al tercero le añadimos 5 cuadrados, así los términos de la sucesión van quedando agrupados según se van añadiendo de la siguiente manera:

$$\{3\}, \{5, 7, 9\}\{11, 13, 15, 17, 19\}, \cdots$$

Donde el término que cierra k-ésimo cuadrado es

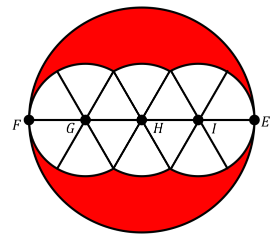
$$2(1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)) + 1 = 2(k^2) + 1$$

Entonces el número que cierra el 18° cuadrado es $2(18^2) + 1 = 2(324) + 1 = 649$.

4. Si Edgar está en el carril 1, entonces como Omar está en un extremo y ya está ocupado el 1, Omar está en el 5. Como Beto no nada al lado de Edgar, entonces debe estar en algún carril de 3 o 4, pero si está en el 3 forzosamente nadaría al lado de Mario (pues los únicos carriles libres serían el 2 y 4), entonces Beto estaría en el 4, lo cual obliga a que Miguel y Mario naden juntos, pero eso no ocurre. En conclusión si Edgar estuviera en el carril 1 forzaría una configuración que no cumple las cuatro afirmaciones. Por lo anterior Edgar debe estar en el 4, lo cual obliga a que Beto este en el carril 1 o 2. En este caso si Beto está en el carril 1, Omar estaría en el 5 lo cual fuerza que Mario y Miguel naden juntos lo cual no ocurre. Luego Beto debe estar en el carril 2, esto fuerza a que Mario esté en el carril 5, Omar en el 1 y Miguel en el 3, la cual es una configuración forzada que cumple las condiciones, por lo tanto esta es la única configuración posible.

5. Consideremos un punto P en alguna de las intersecciones de las rectas y veamos cuántos triángulos tienen a P como vértice. Como hay a lo más $\binom{6}{2} = 15$ intersecciones y cada una de las 6 rectas tienen 5 puntos de intersección nos quedan $15 - 9 = 6$ puntos que pueden ser otro de los vértices del triángulo. Una vez elegido uno de esos 6 puntos, las dos rectas que pasan por él intersecan a las otras dos rectas que teníamos lo cual nos dice que nos queda un único punto para elegir que sea vértice del triángulo. Por lo tanto para cada vértice tenemos 6 triángulos que cumplen las propiedades del problema. Como hay 15 vértices posibles y cada triángulo tiene 3 vértices concluimos que hay $\frac{6 \times 15}{3} = 30$ triángulos de los que se querían contar.

6. Dividamos la figura de la siguiente manera:



El área de la circunferencia mayor es 4π. El área de cada círculo blanco original es π. La figura blanca está formada por 10/6 de círculo blanco y cuatro triángulos equiláteros. Cada triángulo tiene un área de $\sqrt{3}/4$. El área sombreada es

$$4\pi - \frac{10\pi}{6} - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$$

7. Sean $A = abcd$ y $N = pqrs$ dos enteros que se escriben con las mismas cifras. Según las condiciones del problema tenemos que $A = 3N$, con lo cual tenemos que $a + b + c + d = p + q + r + s$ es un múltiplo de 3. En consecuencia, N también es un múltiplo de 3, digamos $N = 3T$, y por tanto $A = 9T$. Así concluímos que $a + b + c + d = p + q + r + s$ es un múltiplo de 9. Como A es un número de 4 cifras, tenemos que $A \leq 9999$. Entonces tenemos que $N \leq 3333$. Como ninguna de las cifras puede ser 2 o 4, podemos concluir que solamente existen dos casos: (1) $p = 3$ y (2) $p = 1$.

Caso (1): Si $p = 3$, entonces $a = 9$ y por tanto la suma de las restantes dos cifras debe dejar residuo 6 al dividirse entre 9. Además q no puede ser mayor a 4 ya que de lo contrario $A = 3N$ tendría 5 cifras. Entonces las únicas posibilidades para las restantes dos cifras son $\{0, 6\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 3\}$. Procedemos a analizar cada una de estas opciones. Para $\{0, 6\}$ tenemos $2! = 2$ formas de acomodar las cifras: 3069, 3096. Lo mismo sucede para $\{1, 5\}$, con los números 3195 y 3159; y también en el caso $\{3, 3\}$ con las opciones 3339 y 3393. Como ninguno de estos números cumple la condición $A = 3N$, observamos que en este caso no hay solución.

Caso(2): Si $p = 1$ entonces $1000 \leq N \leq 1999$ y por tanto $3000 \leq A \leq 5997$. De aquí podemos concluir que hay dos casos: $a = 3$ o $a = 5$. En el primer caso, las dos cifras restantes al sumarse deben dejar residuo 5 al dividirse entre 9; en tanto que en el segundo caso el residuo de la suma deberá ser 3. Entonces surgen las siguientes opciones: para $a = 3$ tenemos $\{0, 5\}$, $\{5, 9\}$, $\{6, 8\}$ y $\{7, 7\}$; en tanto que para $a = 5$ tenemos $\{0, 3\}$, $\{3, 9\}$, $\{5, 7\}$ y $\{6, 6\}$. Analizando cada una de estas opciones como en el inciso anterior nos lleva a concluir que el único número que satisface las condiciones del problema es $N = 1305$.

8. Sea abc el número de tres dígitos tales que $a > b > c > 0$. Entonces $a + c$ debe ser número impar. Si $a + c < 10$, eso significa que el número de las decenas de la suma es $2b$, que es par, lo cual no es posible, por lo tanto $a + c > 10$. Si $2b + 1 > 10$, entonces el dígito de las decenas de la suma es $a + c + 1$, pero como $a + c$ debe ser impar, entonces $a + c + 1$ es par, por lo cual no es posible. Por lo tanto $2b + 1 \leq 9$, o sea $b \leq 4$. Si $b = 4$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, las únicas soluciones en este caso son 942 y 843. Si $b = 3$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, la única solucíon en este caso es 932. Si $b = 2$, entonces $c = 1$ y no existe un dígito a tal que $a + c$ sea impar mayor que 10. En resumen, las únicas soluciones son 932, 942 y 843.

3.5. Prueba por equipos. Nivel II.

1. Coincide con el Problema 3 de Nivel I.

2. Coincide con el Problema 4 de Nivel I.

3. Por ser polígonos regulares tenemos $\angle A_nA_1A_2 = 180° \times \dfrac{n-2}{n}$ y $B_{n+1}A_1A_2 = 180° \times \dfrac{n-1}{n+1}$, luego

$$\angle B_{n+1}A_1A_n = \angle B_{n+1}A_1A_2 - \angle A_nA_1A_2 = \frac{180° \times (n-1)}{n+1} - \frac{180° \times (n-2)}{n} = \frac{360°}{n(n+1)}.$$

Como $A_nA_1 = A_2A_1 = B_{n+1}B_1$ entonces el triángulo $\triangle B_{n+1}A_1A_n$ es isósceles y por tanto

$$\angle A_1B_{n+1}A_n = \angle A_1A_nB_{n+1} = \frac{180° - \angle A_nA_1B_{n+1}}{2} = \frac{180° - \frac{360°}{n(n+1)}}{2} = \frac{90° \times (n^2+n-2)}{n(n+1)}.$$

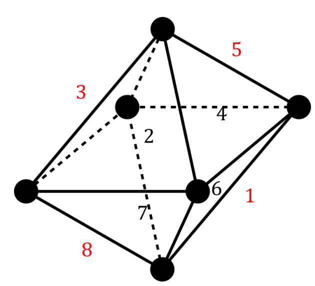
Luego, si n cumple lo pedido, entonces

$$\frac{90° \times (n^2+n-2)}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \times \angle A_1B_{n+1}B_n = \frac{2}{3} \times \frac{180° \times (n-1)}{n+1}.$$

Esto es equivalente a que $n^2 - 7n + 6 = 0$, luego $n = 1$ ó $n = 6$, de donde el único valor posible para n es 6.

4. Coincide con el Problema 8 de Nivel I.

5. El siguiente acomodo funciona (note que los números en rojo representan las caras que están por detrás):

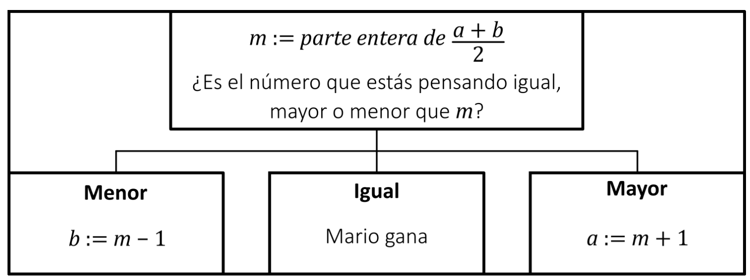


6. Notemos primero que basta probar que $BP = PD$. Como subtienden el mismo arco, tenemos que $\angle ADP = \angle ABP$. Entonces, dado que los triángulos BEP y DAP son obtusos, podemos concluir que son congruentes. Luego $BP = PD$.

7. Para cada n, como ab es fijo, $a+b$ es mínimo cuando $a-b$ lo es, pues $a+b$ mínimo $\Leftrightarrow (a+b)^2$ es mínimo $\Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab$ mínimo, (puesto que ab es constante) $\leftrightarrow a-b$ mínimo. Ahora bien, para cada número de la forma n^2+n tenemos que los a, b que cumplen el enunciado son $a = n+1$ y $b = n$ pues son coprimos y $a - b = 1$ es mínimo. Entonces $f(n^2+n) = s(n+1) - s(n)$. Así

$$\begin{aligned} f(1^2+1) + f(2^2+2) + \cdots & +f(2017^2+2017) \\ &= s(2) - s(1) + s(3) - s(2) + s(4) - s(3) \cdots s(2018) - s(2017) \\ &= s(2018) - s(1) = 11 - 1 = 10. \end{aligned}$$

8. Una estrategia puede ser la siguiente. Sea k el número que Juan está pensando. Llamemos a y b a los números tales que Mario puede estar seguro que el número de Juan está entre a y b (inclusive), estos se irán actualizando según la información que vaya recabando Mario. Por ejemplo, inicialmente $a = 1$ y $b = 1000$. Sea m igual a $\frac{(a+b)}{2}$ o su parte entera en caso de que tenga decimal. Posteriormente, Mario puede hacer la pregunta ¿Es el número que estás pensando igual, mayor o menor a m? Si m es igual al número que está pensando Juan, entonces Mario ya ganó. Sino, hay dos opciones: si responde que **menor**, actualizaremos nuestra b para que sea igual a $m - 1$, ya que sabíamos que $a \leq k \leq b$ y por la información de la respuesta sabemos que $k \leq m$ (notemos que como inicialmente $a \leq k \leq m$, siempre se cumplirá que $a \leq m \leq b$), por lo tanto, ahora sabremos que $a \leq k \leq m$, por lo cual ahora m será el número que sabemos es mayor o igual a k. Haciendo un razonamiento análogo, si Juan responde **mayor**, entonces podemos asignar a la nueva a para que sea igual a $m + 1$. Esto se representa en el siguiente esquema:



Ahora bien, Mario estará seguro del número que está pensando Juan cuando $a = b$ (pues entonces $a \leq k \leq b = a$, y por lo tanto $k = a$). También notemos que después de cada pregunta, la distancia $(b - a)$ entre a y b, irá disminuyendo pues en caso de que la respuesta sea **mayor**, como

$$\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{a+b}{2},$$

entonces

$$b - (m+1) \leq b - (\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}) \leq \frac{b-a}{2} - 1.$$

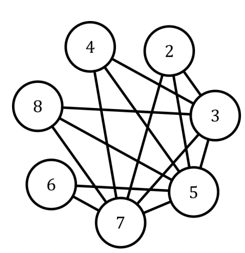
Análogamente si la respuesta es **menor**, se concluye que $(m - 1) - a \leq \frac{b-a}{2}$. Así pues, la nueva distancia entre a y b será a lo más $\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}$ en el siguiente paso.

Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	9
999	499	299	124	61	30	14	6	2	0

Así pues, al cabo de 9 preguntas Mario puede saber cuál número estaba pensando Juan con esta estrategia.

3.6. Prueba por equipos. Nivel III.

1. El siguiente arreglo funciona:



2. Primero notemos que $x^3+3x^2+z^2+2x+3y = x(x+1)(x+2)+3y+z^2$, sin importar el valor de x. Como x, $x+1$, $x+2$ son tres enteros consecutivos, entonces uno de ellos es múltiplo de 3, por lo que $x(x+1)(x+2)+3y$ es múltiplo de 3, luego si existe una terna de enteros tal que $x^3 + 3x^2 + z^2 + 2x + 3y = 2018$, entonces z^2 deja residuo 2 al dividirse entre tres, algo imposible ya que los cuadrados dejan residuo 1 o 0 al dividirse entre tres, de lo anterior se concluye que no existen ternas como las pedidas.

3. Coincide con el Problema 3 de Nivel II.

4. Coincide con el Problema 6 de Nivel II.

5. Coincide con el Problema 7 de Nivel II.

6. Supongamos que C_1, C_2, $\ldots$, C_n son los círculos que buscamos de tal manera que O_i es el centro de C_i. Sea C el círculo con centro en P y radio 1. Es claro que O_1, O_2, $\ldots$, O_n están al borde de C. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que O_1, O_2, $\ldots$, O_n forman un polígono convexo, es decir, que los centros están etiquetados en orden de manera que $\measuredangle O_1PO_2 + \measuredangle O_2PO_3 + \cdots + \measuredangle O_nPO_1 = 360°$. Notemos que el hecho de que O_i no esté en el interior o en el borde de C_{i+1} y que el triángulo O_iPO_{i+1} sea isósceles implica que $\measuredangle O_iPO_{i+1} > 60°$. Dadas las observaciones anteriores es fácil deducir que el máximo número de circunferencias es 5.

7. Como la única relación entre a y a^* son sus dígitos, aseguraremos que ambos sean divisibles por enteros de los que tenemos criterio de divisibilidad. Es claro que $99|a \Leftrightarrow 99|a^*$. De esta manera $D = 99k > 2017$ y $k > 20$. Como buscamos que se pueda asegurar la divisibilidad con un criterio, comprobemos que $k = 25$. Tras varios intentos se llega a que a puede ser de la forma $52xy75$, con lo que aplicando los criterios de divisibilidad, $9|x + y + 1$ y $11|x - y + 5$. Para $x = 7$ y $y = 1$ esto se cumple, ya que $a = 527175$ satisface.

8. Consideremos los números $x = 13^2$ y $w = 13^2 + 13 \times 12$. Si $n < x$, entonces $n!$ contiene a lo más 12 factores 13 y no puede ser bueno. Si $n = x$ entonces $n!$ contiene los primeros doce múltiplos de 13 (que tienen solo un factor 13) y 13^2 que tiene dos. El exponente de 13 en $(13^2)!$ es 14 y no es bueno. si $x < n < w$, entonces $n!$ contiene 14 factores de x y a lo más 11 factores extras pues los múltiplos de 13 entre x y w solo tienen factor 13, por lo tanto $n!$ tiene 14, 15 $\ldots$ o 25 factores 13 y no es bueno. Si $n = 13^3 + 13 \times 12$, entonces $n!$ es bueno, pues tiene 26 factores 13. Ningún número de los que buscamos es mayor a $13^2 + 13 \times 12 + 13 = 2 \times 13^2$, pues $n = w$ es bueno. Notemos que si $n = w$, $w + 1$, $\ldots$,$w + 12$ entonces $n!$ tiene 26 factores 13 y es bueno, además $n - 13 < w$ y sabíamos que ningún número menor a w era bueno. Por tanto los números son w, $w + 1$,$\ldots$,$w + 12$ con $w = 13^2 + 13 \times 122$.