Soluciones Nivel 3

Individual

PARTE A

Problema 1. (Comité) Las caras de un dado tienen los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lalo forma números siguiendo tres pasos: *Paso 1.* Escoge tres caras y multiplica los tres números de estas caras; *Paso 2.* Encuentra el producto de los números de las otras tres caras; *Paso 3.* El número lo forma sumando los dos resultados anteriores. ¿Cuál es el número más pequeño que puede formar Lalo de esta manera?

R:54

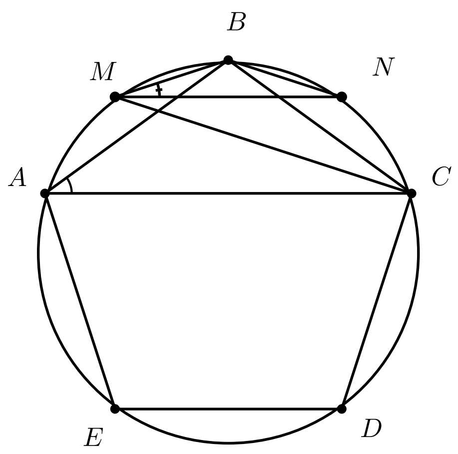
Solución. El número más pequeño que se puede obtener es cuando se acomodan de alguna de las siguientes formas:

$$6 \times 5 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 = 54$$
$$6 \times 4 \times 1 + 5 \times 3 \times 2 = 54$$

Problema 2. (Sinaloa) Sea $ABCDE$ un pentágono regular cuyos vértices están en una misma circunferencia, sean M y N los puntos medios de los arcos AB y BC. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo $\angle BMN$?

R:18°

Solución. Si N es el punto medio del arco BC del circuncírculo del triángulo BMC, entonces MN es bisectriz del ángulo $\angle BMC$ y así $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BMC$, como $BMAC$ es cíclico, $\angle BMC = \angle BAC$ y así $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BAC$. Como $BA = BC$, el triángulo BAC es isósceles, entonces $\angle BAC = \frac{180° - \angle ABC}{2}$, y como $\angle ABC = 108°$, pues el pentágono es regular, se tiene que $\angle BAC = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$ y $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}36° = 18°$.



Segunda solución. Si tomamos O, P, Q los puntos medios de los arcos CD, DE y EA, respectivamente se forma un decágono regular $AMBNCODPEQ$. Luego, $\angle MBN =$ (ángulo de un decágono regular) $= 180^\circ\left(\frac{10-2}{10}\right) = \frac{8}{10} \times 180^\circ$.

Como el triángulo MBN es isósceles

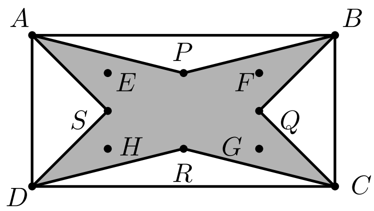
$$\angle BMN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MBN) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{4}{5} \times 180^\circ\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \times 180^\circ\right) = 18^\circ$$

Problema 3. (Querétaro) En una bolsa tengo 2 monedas de \$1, 3 monedas de \$5, y 5 monedas de \$10. Si saco 5 monedas de la bolsa sin reemplazo (es decir, una vez que tomo una moneda la dejo afuera) y todas las monedas tienen la misma probabilidad de ser escogidas, ¿cuál es la probabilidad de sacar por lo menos \$40?

R: $\frac{2}{9}$

Solución. Hay $\binom{10}{5} = 252$ formas de sacar 5 monedas de la bolsa. Para obtener al menos \$40 hay 3 escenarios: 1) Sacar 5 monedas de \$10; 2) Sacar 4 monedas de \$10 y cualquier otra moneda; y 3) Sacar 3 monedas de \$10 y 2 de \$5. Para el caso 1 hay $\binom{5}{5} = 1$ manera, para el caso 2 hay $\binom{5}{4} \times \binom{5}{1} = 5 \times 5 = 25$ maneras, y para el caso 3 hay $\binom{5}{3} \times \binom{5}{2} = 10 \times 3 = 30$ maneras. Entonces la probabilidad de sacar al menos 40 es $\frac{1+25+30}{252} = \frac{56}{252} = \frac{2}{9}$.

Problema 4. (Guerrero) En un rectángulo $ABCD$ de área $40\,cm^2$, considera a E y G, puntos en la diagonal AC de manera que $AE = 2\,cm$, $EG = 6\,cm$ y $GC = 2\,cm$; considera también los puntos F y H en la diagonal BD, de manera que $BF = 2\,cm$, $FH = 6\,cm$ y $HD = 2\,cm$. Se construye una estrella de 4 puntas $APBQCRDSA$, de manera que P, Q, R, S son los puntos medios de los segmentos EF, FG, GH y HE, respectivamente. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la estrella?



R: 24

Solución. Es claro ver que EF es paralela a AB. Luego, $(APB) = (AFB)$. Ahora, como $BF = 2$ y $BD = 2+6+2 = 10$, entonces $\frac{(ABF)}{(ABD)} = \frac{BF}{BD} = \frac{2}{10}$. Por lo que $(ABP) = (ABF) = \frac{2}{10}(ABD) = \frac{1}{10}(ABCD) = 4$. Análogamente, $(BQC) = (CRD) = (DSA) = 4$. Por lo tanto, el área de la estrella es $(ABCD)-(APB)-(BQC)-(CRD)-(DSA) = 40-4\times 4 = 24$.

Problema 5. (Comité) En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el 60% de los chicos están bailando y el 80% de las chicas están bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?

R: 24

Solución. Por cada 4 chicas que bailan hay una chica que no baila; y por cada 3 chicos que bailan hay 2 que no bailan. Los números posibles de parejas que bailan son múltiplos de 12; para el primer múltiplo de 12, tendremos 12 chicas que bailan y 3 que no bailan y 12 chicos que bailan y 8 que no bailan. En este caso tendremos 12 chicas que bailan, 12 chicos que bailan y 11 personas que no bailan, la suma de estos es $12 + 12 + 11 = 35$, y las personas que bailan son 24.
Segunda solución. Sean a el número de chicos que están en la fiesta y b el número de chicas que están en la fiesta. Tenemos que $a + b = 35$, además como el 60% de los chicos están bailando con el 80% de las chicas, tenemos que $\frac{3}{5}a = \frac{4}{5}b$, por lo que $b = \frac{3}{4}a$. Luego $a + \frac{3}{4}a = 35$, por lo que $a = 20$ y entonces $b = 15$. Por tanto, hay $\frac{3}{5}20 + \frac{4}{5}15 = 24$ personas bailando.

Problema 6. (Coahuila) Rogelio pinta los vértices de un cubo de 8 colores distintos. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las letras de la palabra OAXTEPEC en los vértices del cubo de tal manera que no haya 2 letras E unidas por una arista?

R: 11520

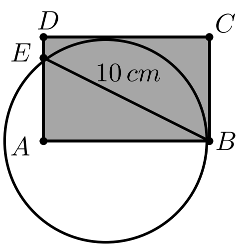
Solución. Primero vamos a acomodar las letras E. Como hay 8 vértices entonces hay 8 maneras de acomodar la primera letra E, luego, estamos ocupando ya 4 vértices (donde colocamos la primer E y los 3 vértices que se unen a este vértice por una arista), por lo que la segunda E la podemos acomodar de 4 maneras. Habría entonces 8×4 maneras de acomodar las letras E, pero como estas son iguales dividimos 8×4 entre 2 para evitar repeticiones. El resto de las letras no tienen restricción, por lo que hay 6! maneras de acomodarlas. En total serían $16 \times 6! = 11520$ maneras de acomodar las 8 letras.

Problema 7. (Comité) Considera todos los números que se obtienen de 74477447 al reordenar sus cifras, ¿cuántos de estos números son cuadrados perfectos?
Recuerda que un número es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero.

R:0

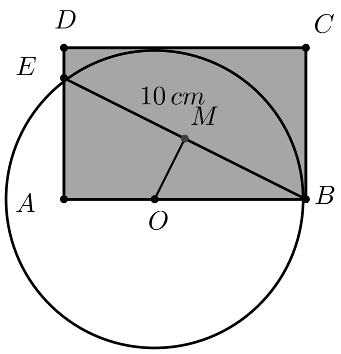
Solución. No hay ningún cuadrado perfecto que se pueda obtener de esta manera. El número 74477447, y cualquier otro número que resulte de reordenar sus cifras cumple que la suma de sus cifras que es $4 \times 4 + 4 \times 7 = 16 + 28 = 44$, luego el número y los que resulten de reordenar las cifras son congruentes a 2 módulo 3. Pero un cuadrado perfecto es congruente, módulo 3, solamente al número 0 o al número 1.

Problema 8. (Comité) Encuentra, en cm^2, el área del rectángulo sombreado $ABCD$ de la siguiente figura, si se conoce que la longitud del segmento BE es de 10 cm, y la circunferencia es tangente a los lados BC y CD del rectángulo.



R:50

Solución. Veamos que el área del rectángulo $ABCD$ es 50 cm^2. Sean O el centro de la circunferencia y M el punto medio de la cuerda BE. Como los triángulos ABE y MBO son semejantes , se tiene que $\frac{AB}{BE} = \frac{MB}{BO}$.



Luego área $(ABCD) = AB \times BC = AB \times BO = BE \times MB = 10 \times 5 = 50\ cm^2$.

Problema 9. (Comité) ¿Cuál es la menor cantidad de sumandos que se necesitan para escribir a 2019 como suma de números que sean cuadrados perfectos?

R:3

Solución. Note que 2019 es divisibe entre 3, pero no es divisible entre 9. La suma de dos números cuadrados $a^2 + b^2$ es un múltiplo de 3 solamente en el caso de que tanto a como b sean múltiplos de 3 (ya que el residuo al dividir entre 3 a un número cuadrado es 0 o 1), pero entonces $a^2 + b^2$ es múltiplo de 9. Luego 2019 no puede ser la suma de dos cuadrados perfectos. Como $2019 = 5^2 + 25^2 + 37^2$, la menor cantidad de sumandos que se necesitan para escribir a 2019 como sumas de cuadrados perfectos es 3.

Problema 10. (Comité) Para cada subconjunto de $\{1,2,3,4,5\}$, acomoda los números en orden decreciente (de mayor a menor) y realiza la suma con signos alternados; por ejemplo, si tomas al conjunto $\{5,1,2\}$ su suma alternada es $5-2+1=4$. ¿Cuánto vale la suma de todas las sumas alternadas cuando consideras todos los subconjuntos?

R:80

Solución. Los subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ los dividimos en dos tipos, los que tienen al número 5 y los que no lo tienen. Hay una biyección entre estos dos tipos de conjuntos a un conjunto A que tenga al 5 le asignamos $A \setminus \{5\}$, (si el conjunto es $A=\{5\}$, entonces $A \setminus \{5\}$ es el conjunto vacío, la suma con signos alternados del conjunto vacío es 0). Conjuntos con el 5 hay 16 y las sumas alternadas de A y $A \setminus \{5\}$, cumplen que al sumarlas da 5. Luego la suma que nos piden es, $16 \times 5 = 80$.

Problema 11. (Guerrero) Un padre y su hijo cumplen años el mismo día. En tres cumpleaños diferentes, la razón entre sus edades fueron $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{2}{1}$. ¿Cuál es la diferencia de edades entre el padre y su hijo?

R:28

Solución. Sean p y h las edades del padre y el hijo respectivamente, entonces $x=p-h$ es la diferencia que se desea encontrar. Se tiene que $\frac{p}{h}=\frac{h+x}{h}=7/3, 13/6, 2$, entonces para distintas edades del hijo se tiene: $\frac{x}{h_1}=\frac{4}{3}$, es decir, $3x=4h_1$; $\frac{x}{h_2}=\frac{7}{6}$, es decir, $6x=7h_2$; y $x=h_3$. De esto, se tiene que x es múltiplo del mínimo común múltiplo de 4 y 7. Es decir $x \in \{28, 56, 84, \ldots\}$.
Para el caso $x=56$, el padre tendría el doble de la edad del hijo en el tercer momento, por lo que tendría 112 años, lo cual es imposible. Claramente, para $x>56$ la edad del padre en el tercer momento sería mayor. Por lo tanto, la única diferencia razonable es de 28 años.

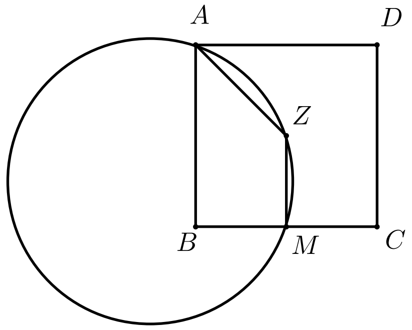
Problema 12. (San Luis Potosí) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grado 2 y a,b,c,d números reales tales que $f(a)=500$, $f(b)=100$, $f(c)=1000$, $f(d)=2015$, $g(a)=1519$, $g(b)=1919$ y $g(c)=1019$. ¿Cuánto vale $g(d)$?

R:4

Solución. Formamos el polinomio $p(x)=f(x)+g(x)-2019$. Como $f(x)$ y $g(x)$ son de grado dos, entonces el grado de $p(x)$ es menor o igual a dos, pero $p(a)=p(b)=p(c)=0$, por lo que el polinomio $p(x)$ es el polinomio cero. Entonces $p(x)=f(x)+g(x)-2019=0$, por lo que $g(x)=2019-f(x)$, con lo que se obtiene que $g(d)=2019-f(d)=2019-2015=4$

PARTE B

Problema 13. (Jalisco) Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide $2\,cm$, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.



Solución. Sea X la intersección del lado BC con la circunferencia por A, Z y M, luego A, Z, M y X son concíclicos. Como Z es el centro del cuadrado y M es el punto medio de BC, entonces $\angle ZMX = 90°$. Luego, ZX es un diámetro de la circunferencia, por lo que $ZX = 2R$, donde R es el radio buscado.
Es fácil ver que $ZM = 1$ y que $\angle AZM = 135°$, por lo que $\angle MXA = 45°$. Además, $\angle ABX$ es recto, por lo que el triángulo ABX es rectángulo isósceles con $BX = AB = 2$. Entonces $MX = MB + BX = 3$. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ZXM, se tiene que $ZX^2 = ZM^2 + MX^2$. Luego, $(2R)^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, por lo que $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

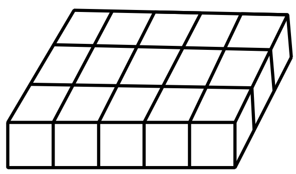
Problema 14. (Tabasco) Un número natural es una quinta potencia si es de la forma k^5 para algún número natural k. Demuestra que si dos números naturales n, m son tales que $n^2 \cdot m^3$ es una quinta potencia entonces el número $n^3 \cdot m^2$ también es una quinta potencia.

Solución. Escribimos $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ y $m = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$, donde $p_1, ..., p_k$ son los primos que aparecen en las factorizaciones de n y m y además $a_i, b_i \geq 0$. Como $n^2 \cdot m^3$ es una quinta potencia para cada i debemos de tener que $2a_i + 3b_i \equiv 0 \pmod 5$, de ahi que

$$0 \equiv 5a_i + 5b_i \equiv 2a_i + 3b_i + 3a_i + 2b_i \equiv 3a_i + 2b_i \pmod 5$$

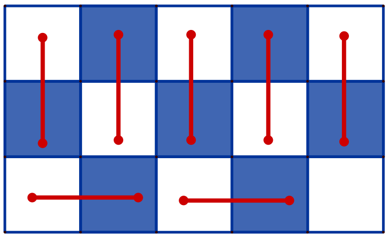
y de ahí se sigue que $n^2 \cdot m^3$ también es una quinta potencia.

Problema 15. (Comité) Hay 15 cajas, acomodadas en un arreglo rectangular de 3×5, como se muestra en el siguiente dibujo, además en cada caja hay 7 canicas.



Una *tirada* consiste en elegir dos cajas que compartan un lado y sacar 2 canicas, una de cada una de las dos cajas elegidas. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede quedar, cuando ya no sea posible realizar una tirada?

Solución. Coloreamos las cajas como tablero de ajedrez, con las esquinas blancas. El número de cajas blancas es 8 y el de negras es 7. Podemos pensar que las canicas heredan el color de la caja. Luego hay $8 \times 7 = 56$ canicas blancas y $7 \times 7 = 49$ canicas negras. En cada tirada se saca una canica de cada color. Luego, a lo más se pueden hacer 49 tiradas, donde se sacan 49 canicas de cada color, por lo que quedan entre las cajas blancas 7 canicas, luego el menor número de canicas que puede quedar es mayor o igual a 7. Se puede tirar de la siguiente manera,



donde cada segmento representa la tirada donde se escogen las dos cajas señaladas, así se muestra que se sacan las canicas de todas las cajas salvo la de la caja de la esquina inferior derecha, que tiene 7.

Equipos

Problema 1. (Chiapas) Un triángulo acutángulo cumple que sus tres ángulos miden en grados un número entero y la medida del ángulo mayor es seis veces la medida del ángulo menor. Hallar las medidas, en grados, de los ángulos del triángulo.

R:14,82,84

Solución. Sea ABC un triángulo acutángulo. Podemos suponer que las medidas de los ángulos cumplen $A \leq B \leq C$. Entonces $6A = C < 90$, pues ABC es acutángulo. Luego el valor más grande de C es cuando $6A = C = 84$, es decir $A = \frac{84}{6} = 14$. Luego, $B = 180 - 14 - 84 = 82$. Si $C \leq 84 - 6 = 78$, entonces $A \leq \frac{78}{6} = 13$ y $B \geq 180 - 78 - 13 = 89$ lo cual no es posible porque $C \leq 78$ es el ángulo más grande. Por lo tanto los ángulos del triángulo ABC son 14, 82 y 84.

Problema 2. (Puebla) El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él; por ejemplo, el segundo término es $9 + 7^2 = 58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

Solución. Los términos de la sucesión son:

$$97, 58, 69, 87, 57, 54, 21, 3, 9, 81, 9, 81, \ldots$$

A partir del noveno término se repiten de dos en dos el 9 y el 81, luego como 2019 es impar, el término 2019 es 9.

Problema 3. (Jalisco) Carlos estaba jugando con los números y los acomodó de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

Empezó a formar caminos uniendo los números 1-2-3-4-5-6-7 mediante segmentos de rectas horizontales o verticales en ese orden y tocando solo una vez cada número. Si continua así, ¿cuántos caminos pudo formar?

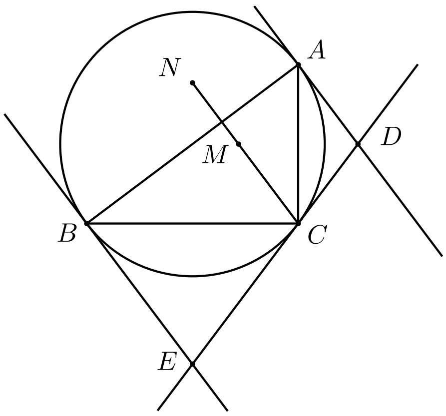
R:1023

Solución. Sea a_j la cantidad de formas de ir del j-ésimo 1 (de izquierda a derecha) al número 7, esto para $1 \leq j \leq 13$. Entonces, un camino que va del j-ésimo 1 al 7 (para $1 \leq j \leq 7$) tiene que ir $7 - j$ veces a la derecha y $j - 1$ veces hacia abajo (es fácil ver que no puede ir hacia arriba ni hacia la izquierda por cómo son los caminos). Es decir, en total debe hacer 6 movimientos. Esto se puede hacer de $C(6, j-1)$ maneras, esto es, $a_j = C(6, j-1)$ para $1 \leq j \leq 7$. Por la simetría de la figura, se tiene que $a_j = C(6, 13 - j)$ para $8 \leq j \leq 13$. Luego, el número total de caminos que van de algún 1 al 7 es

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{13} = \sum_{j=1}^{7} C(6, j-1) + \sum_{j=8}^{13} C(6, 13-j) = 2^6 + (2^6 - 1) = 2^7 - 1$$

esto debido a la identidad $\sum_{j=0}^{n} C(n, j) = 2^n$ y a que $C(6, 6) = 1$.
Por lo tanto, el número total de caminos es $2^7 - 1 = 127$.

Problema 4. (Tabasco) Sean ABC un triángulo con circuncírculo Γ, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 las tangentes a Γ en A, B y C respectivamente. Denota por D la intersección de ℓ_1 y ℓ_3 y por E la intersección de ℓ_2 y ℓ_3. Sean M el reflejado de D con respecto a la recta AC y N el reflejado de E con respecto a la recta BC. Muestra que si M, N y C están alineados, entonces $\angle ACB = 90°$.



Solución. Notemos que como M es el reflejado de D con respecto a la recta AC entonces AC y DM son perpendiculares y $CD = CM$. Por ser DA y DC las tangentes desde D a Γ tienen la misma longitud. De aquí se obtiene que: $\angle MCA = \angle ACD = \angle DAC$, por lo tanto las rectas AD y CM son paralelas. Análogamente las rectas CN y EB son paralelas.
Si C, M y N están alineados, entonces AD y BE son paralelas. Pero como AD y BE son tangentes a Γ, tenemos que AB es un diámetro de Γ y por tanto $\angle ACB = 90°$.

Problema 5. (Comité) En una carrera de atletismo los corredores A, B y C fueron los primeros en llegar a la meta. Cuando A llegó a la meta, los corredores B y C se encontraban a 2 metros y a 2.98 metros de A, respectivamente. Cuando llego B a la meta el corredor C estaba a 1 metro de la meta. Suponga que cada una de las velocidades de los corredores son constantes durante la carrera. ¿De cuántos metros es la carrera?

R:100

Solución. Suponga que v_A, v_B y v_C son las velocidades de los corredores A, B y C, respectivamente. Sean también t_A, t_B y t_C los tiempos en que tardan en llegar a la meta (desde un punto inicial común) los corredores A, B y C, respectivamente. Sea d la distancia de la carrera. Tenemos que,

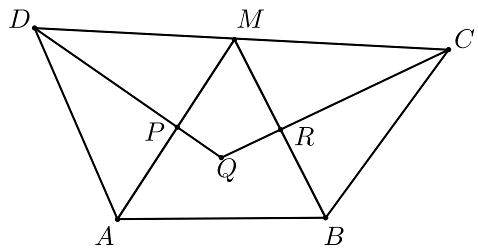
$$\begin{aligned}
&v_A t_A = v_B t_B = d\\
&v_B t_A = d - 2\\
&v_C t_A = d - 2.98\\
&v_C t_B = d - 1
\end{aligned}$$

Como, $\frac{t_A}{t_B} = \frac{v_B t_A}{v_B t_B} = \frac{d-2}{d}$ y $\frac{t_A}{t_B} = \frac{v_C t_A}{v_C t_B} = \frac{d-2.98}{d-1}$, tenemos que: $(d-2)(d-1) = (d-2.98)(d)$.
De donde, $0.02d - 2 = 0$, por lo que la distancia de la carrera es $d = 100$ metros.

Problema 6. (Aguascalientes) Una *tripleta Eliana* consiste en tres números enteros positivos distintos que cumplen que la suma de dos de ellos es divisible entre el tercero de ellos. Encuentra el mayor valor que puede tener la suma de los elementos de una tripleta Eliana, teniendo la restricción de que el producto de sus elementos es a lo más 2019.

Solución. Observemos que la suma de dos elementos de la tripleta es divisible entre el otro si y sólo si la suma de los tres números es divisible entre cada uno de los tres números de la tripleta. Si llamamos n a la suma de los elementos de la tripleta, entonces debemos encontrar tres divisores de este número cuya suma sea igual a n. Ahora, si expresamos a esos divisores como fracción de n, tenemos que encontrar tres enteros positivos mayores o iguales a 2 de tal forma que sus recíprocos suman 1 (ya que, $\frac{n}{a}+\frac{n}{b}+\frac{n}{c}=n \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$). Si el menor de ellos fuera mayor o igual a 3, la suma de los tres sería a lo más $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$. Por lo tanto el menor es 2 y uno de los números debe ser la mitad de n. Si el segundo menor fuera 4 o mayor, la suma no podría ser 1 pues $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$ por lo cual el segundo número debe de ser 3. Luego el último número debe de ser 6. Ahora el número n debe ser múltiplo de 6. Luego el producto de esos tres números será $\frac{n}{2}\times\frac{n}{3}\times\frac{n}{6}=\frac{n^3}{36}$. Como $\frac{n^3}{36}$ debe de ser menor o igual a 2019, y como queremos maximizar n, tomando en cuenta que n debe de ser múltiplo de 6. Se observa que $\frac{42^3}{36}=7\times7\times42=2058>2019$ y que $\frac{36^3}{36}=36\times36=1296<2019$. Por lo cual la máxima suma posible es 36.

Problema 7. (San Luis Potosí) La figura $ABCD$ es un cuadrilátero. Las rectas AM, BM, CQ y DQ son bisectrices de los ángulos interiores en los vértices A, B, C y D, respectivamente y de manera que M se encuentre en DC. Sea P la intersección de AM con DQ y sea R la intersección de BM con CQ.



Si el cuadrilátero $PQRM$ es un rectángulo, encuentra el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{AB+CD}{BC+DA}.$$

R:2

Solución. Notemos que $\angle QPM = 90° = \angle APD$. Sea $\alpha = \angle PAD$ y $\beta = \angle PDA$. Entonces $\alpha+\beta = 90°$. Además, $\angle MAB = \angle MAD = \alpha$, por la bisectriz AM, y $\angle AMB = 90°$, por lo que $\angle ABM = 90° - \alpha = \beta = \angle MBC$ por la bisectriz BM. Como $\angle DAB = 2\alpha$ y $\angle ABC = 2\beta$, entonces $\angle DAB + \angle ABC = 180°$, por lo que AD y BC son paralelos. Análogamente con AB y DC. Por lo que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo, y $AD = BC$ y $AB = CD$. También, $\angle DPM = 90°$, $\angle PDM = \beta$, por lo que $\angle PMD = \alpha$. Por lo que el triángulo ADM es isósceles, de donde $AD = DM$. Análogamente $BC = CM$, por lo que $CD = 2AD$. Entonces:

$$\frac{AB+CD}{BC+DA} = \frac{2CD}{2AD} = \frac{2\cdot(2AD)}{2AD} = 2$$

Problema 8. (Comité) Muestra que no importa como se acomoden todos los números $1, 2, \ldots, 25$ en los cuadritos de un tablero de 5×5, siempre hay un subtablero de 2×2 que satisface que los cuatro números de este subtablero suman más de 41.

Solución. Notemos que cuando hacemos la suma de todos los subtableros de 2×2 (de los que hay 16) los números de las esquinas del tablero de 5×5 se cuentan una sola vez (hay solamente un subtablero que lo cubre), los números de los cuadritos de las orillas que no son esquinas se cuentan dos veces (solamente hay dos subtableros que lo cubre) y los números de los otros cuadritos se cuentan cuatro veces (hay cuatro subtableros que lo cubre). La suma S de los 16 subtableros de 2×2 será mayor o igual a $(25+24+23+22)+2(21+20+\cdots+10)+4(9+8+\cdots+1) = 94+2(186)+4(90) = 666$, esto es $666 \leq S$. Por otro lado, si en todo subtablero de 2×2 la suma de los números en los cuadritos es menor o igual a 41, la suma de los 16 subtableros de 2×2 será menor o igual a $16\times41 = 656$, esto es $S \leq 656$, lo que será una contradicción.