Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Examen Individual

NIVEL III

Instrucciones: El examen consta de dos partes. La parte A consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada uno. En estos problemas solo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente a cada problema. La parte B consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno. En estos problemas es posible acumular puntos parciales. La duración del examen es de **120 minutos.**

Parte A

Problema 1 *(COAHUILA) Isaac y Alfredo juegan a lanzar dados de la siguiente manera. Isaac lanza un dado y apunta el número que salió en su libreta, luego vuelve a lanzar el dado y apunta el número que le salió a la derecha del número que ya había escrito, formando así un número de 2 cifras. Luego, Alfredo hace lo mismo que hizo Isaac. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Alfredo sea mayor que el número de Isaac?*

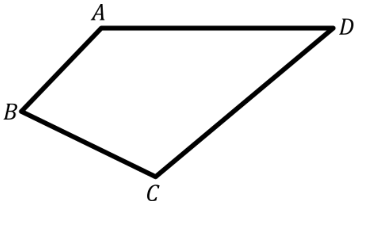
R: 35/72

Solución: Como un dado tiene 6 números, en total se pueden formar $6\times 6 = 6^2$ números de dos cifras. Por tanto, la totalidad de casos (tomando en cuenta tanto los tiros de Isaac como de Alfredo) es $6^2 \times 6^2 = 6^4$. Por otro lado, notemos que en 6^2 casos Isaac y Alfredo obtienen los mismos resultados. Por tanto, en $6^4 - 6^2$ casos los resultados son distintos, y de ellos, la mitad corresponden al caso en que el número de Alfredo es mayor. Por tanto la probabilidad buscada es igual a

$$\frac{(6^4 - 6^2)/2}{6^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} = \frac{35}{72}.$$

Problema 2 *(COMITÉ) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $DC = 13$ cm y $AD = 12$ cm. Si $\angle ABC$ es recto, calcula el área (en cm^2) de $ABCD$.*

R: 36



Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Solución Por el Teorema de Pitágoras $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$. Por otro lado, notemos que $AD^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 = DC^2$. Entonces, por el recíproco del Teorema de Pitágoras tenemos que ADC es un triángulo rectángulo y $\angle DAC$ es recto. Por tanto $[ABCD] = [ABC] + [ADC] = 3 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{12}{2} = 36$ cm^2.

Problema 3 *(COMITÉ) En una escuela hay 8 alumnos que desean formar equipos de 3. ¿Cuántos equipos se pueden formar, si es permitido que dos equipos tengan a lo más un alumno en común?* R: 8

Solución: Si $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ son los alumnos, se pueden formar 8 equipos así: $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 8)$, $(3, 4, 8)$, $(3, 5, 7)$, $(6, 7, 8)$.
Si $A_1, \ldots, A_n$ son los equipos, entonces $|A_j| = 3$ con $1 \leq j \leq 8$, y $|A_i \cap A_j| \leq 1$ si $i \neq j$. Si existe a que esté en cuatro distintas A_i y como solo hay un alumno común en dos equipos, los otros 8 alumnos que se necesitan para los 4 equipos deben ser diferentes, por lo que deberá haber al menos $1 + 2 \cdot 4 = 9$ alumnos, lo cual no es posible. Por lo que un alumno pertenecerá a lo más a 3 equipos. Luego con los 8 alumnos podemos formar a lo más $\frac{8 \cdot 3}{3}$ equipos, es decir, el número de equipos n debe cumplir que $n \leq \frac{8 \cdot 3}{3} = 8$.

Problema 4 *(COMITÉ) En una competencia internacional de matemáticas, el 28% de los concursantes son de Asia, el 10% de Oceanía. Los concursantes de África junto con los de Europa son el 40% del total, además Asia tiene 66 alumnos más que los alumnos de África y entre alumnos de Europa y de Oceanía hay 187 alumnos. ¿Cuántos concursantes europeos participaron?* R: 132

Solución: Sea T el total de concursantes. De Asia hay $A = \frac{28}{100}T$, de Oceanía $O = \frac{10}{100}T$ y entre africanos y europeos hay $Af + E = \frac{40}{100}T$. También se tiene que $A = Af + 66$ y $E + O = 187$, por lo que

$$\frac{40}{100}T = Af + E = (A - 66) + (187 - O) = \frac{28}{100}T - 66 + 187 - \frac{10}{100}T,$$

luego

$$\frac{40}{100}T = \frac{18}{100}T + 121,$$

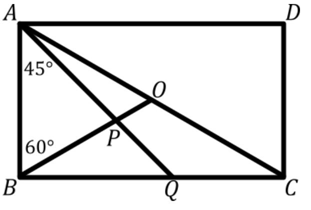
por lo que $T = \frac{1}{22}(12100) = 550$. Así a la competencia asistieron 550 alumnos. De Oceanía asistieron 55 alumnos que corresponden al 10%, y como $E + O = 187$, se tiene que asistieron de Europa $187 - 55 = 132$ competidores.

Problema 5 *(COMITÉ) Sea $ABCD$ un rectángulo donde su diagonal AC y Q un punto sobre BC tal que $\angle BAQ = \angle QAD$ y $\angle QAD = 15°$. Encuentra la medida en grados del ángulo $\angle BOQ$, donde O es el punto medio de AC.* R: 75°

Solución: Denotemos por P la intersección de AQ y BO. Como $\angle BAQ = 45°$ y $\angle QAC = 15°$ se tiene que $\angle BAO = 60°$ y como O es punto de intersección de las diagonales,

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

$\angle OBC = \angle BCO = \angle OAD = 30°$, luego $\angle ABO = 60°$, por lo que el triángulo ABO es equilátero. Luego $\angle APB = 180° - 60° - 45° = 75°$.



Como ABQ es un triángulo rectángulo isósceles con $AB = BQ$ y como ABO es equilátero se tiene que $BO = AB = BQ$, luego OBQ es isósceles y como $\angle OBQ = 30°$ se tiene que $\angle BOQ = \angle BQO = 75°$.

Problema 6 *(COMITÉ) Encuentra el mayor número entero positivo n, tal que $n^2 + 2018n$ sea un cuadrado perfecto.* R: $1008^2/2$

Solución: Sea m tal que $n^2 + 2018n = (n+m)^2$. Desarrollando y simplificando obtenemos $n = \dfrac{m^2}{2018 - 2m}$. Notemos que se trata de una función creciente en m para $1 \leq m \leq 1008$. Además la expresión no está definida para $m = 1009$ y $n < 0$ si $m \geq 1010$. Así que el máximo se alcanza en $m = 1008$. Entonces $n = \frac{1008^2}{2}$.

Problema 7 *(COMITÉ) La colección de números a_n se define como sigue:*

$$a_1 = 1 \quad y \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{2 + 3a_n}, \quad para \ n \geq 1.$$

Encuentra el valor numérico de a_{67}. R: $1/100$

Solución: La ecuación de recursión se re-escribe así

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2 + 3a_n}{2a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2}$$

Si $b_n = \frac{1}{a_n}$, entonces $b_{n+1} = b_n + \frac{3}{2} = b_{n-1} + \frac{3}{2} \cdot 2 = \ldots = b_1 + \frac{3}{2} \cdot n$. Luego, $b_{67} = b_1 + \frac{3}{2}66 = 1 + 3(33) = 100$ por lo que $a_{67} = \frac{1}{100}$.

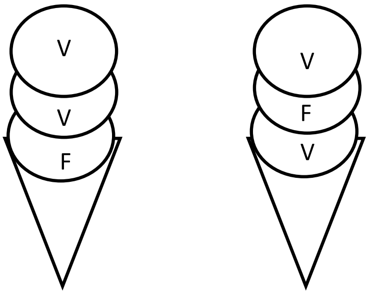
Problema 8 *(MICHOACÁN) Sea ABC un triángulo isósceles cuyo ángulo en A mide $24°$, siendo este el ángulo desigual. Un punto D en la circunferencia de centro C y radio AC es tal que BD interseca al segmento AC. La perpendicular a BC por D corta a la circunferencia en E. Encuentra $\angle ADB + \angle BEA$.* R: $78°$

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Solución: BC corta a la circunferencia en F con B entre F y C. Notemos que el triángulo FDE es isósceles y por tanto $\angle FDB = \angle FEB$. Por tanto

$$\begin{aligned}\angle ADB + \angle BEA &= \angle ADB - \angle FDB + \angle BEA + \angle FEB \\ &= \angle ADF + \angle AEF = 2\angle ADF = \angle ACF \\ &= \frac{180° - 24°}{2} = 78°.\end{aligned}$$

Problema 9 *(COAHUILA) Lupita quiere invitarle un helado a cada uno de sus amigos Hugo, Ricardo y Deeds. Para ello tiene tres conos y 7 bolas de helado para repartir: 2 de chocolate, 2 de vainilla, 2 de fresa y 1 de limón. ¿De cuántas maneras puede formar y repartir los helados, si cada uno de sus amigos debe tener un número distinto (no negativo) de bolas en su helado? Nota: Las bolas del mismo sabor son idénticos entre sí, pero el orden en que se distribuyen las bolas en un cono sí importa. Por ejemplo, los siguientes dos helados son distintos.*



R: 3780

Solución: Primero notemos que las diferentes formas de escribir a 7 como la suma de tres enteros positivos son: $5+1+1$, $4+2+1$, $3+3+1$ y $3+2+2$. De estas, la única que tiene tres sumandos distintos es $4+2+1$. Si ponemos todas las bolas de helado juntas se forma una "palabra" de longitud 7 con 2 C's, 2 V's, 2 F's y 1 L. Usando permutaciones con repetición vemos que hay

$$\frac{7!}{2!2!2!1} = 630$$

de estas palabras. Ahora bien, una palabra da origen a una forma de hacer 3 helados, simplemente dividiéndola en segmentos de longitud 4, 2 y 1 (ver figura).

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

□□□□□□□

⇓

□□□□ □□ □

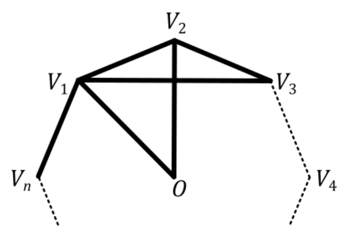
Finalmente, solo basta permutar estos helados entre Hugo, Ricardo y Deeds para obtener todas las formas requeridas. La respuesta es $3! \times 630 = 3780$.

Problema 10 *(CHIAPAS) Sea P un polígono regular de n lados y vértices $V_1, V_2, \cdots, V_n$, y sea O su centro. Determina* todos *los posibles valores de n para que la bisectriz de $\angle V_2V_1O$ pase por V_3.*

R: 6

Solución 1: Por ser P regular, el ángulo interno $\angle V_2V_1V_n$ es, en grados,

$$\angle V_2V_1V_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n};$$



Como V_1O es la bisectriz de $\angle V_2V_1V_n$, se tiene que $\angle V_2V_1O = \frac{(n-2)90^\circ}{n}$. Por la hipótesis se tiene

$$\angle V_2V_1V_3 = \frac{1}{2}\angle V_2V_1O = \frac{(n-2)45}{n}$$

Como el segmento V_1V_3 es perpendicular al segmento V_2O, y $\angle V_2OV_1 = \frac{360^\circ}{n}$, por ser central; $\angle OV_1V_3 + \angle V_2OV_1 = 90^\circ$. Sustituimos por los valores de $\angle OV_1V_3$ y $\angle V_2OV_1$, esto es:

$$\frac{(n-2)45^\circ}{n} + \frac{360^\circ}{n} = 90$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{n}{45}$ se llega a $(n-2)+8 = 2n$, con lo cual $n = 6$.

Solución 2: Consideremos el cuadrilátero $OV_1V_2V_3$ que se forma de unir los dos triángulos isósceles congruentes OV_1V_2 y OV_2V_3 . Es claro que OV_2 es perpendicular a V_1V_3 y que los

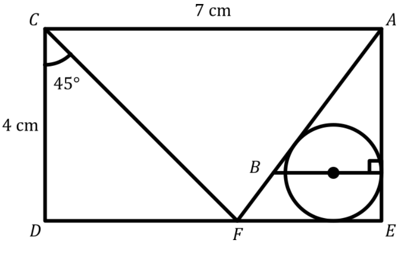
Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

triángulos $V_1V_2V_3$ y OV_1V_3 son triángulos isósceles. Sea P la intersección de OV_2 y V_1V_3, los cuatro triángulos PV_1V_2, PV_3V_2, PV_3O, PV_1O, son congruentes (por criterio ALA). Luego $OV_1V_2V_3$ es un rombo y en consecuencia OV_1V_2 es un triángulo equilátero, por lo que $\angle V_1OV_2 = 60°$. Pero por otro lado, $\angle V_1OV_2 = \frac{360}{n}$, por ser ángulo central del polígono regular de n lados. Igualando los valores de $\angle V_1OV_2$ obtenemos $n = 6$.

Problema 11 *(COMITÉ) Una lancha cuando se desplaza en un río tranquilo va* $9\ km/h$. *Un día que había corriente en el río, José recorrió un kilómetro de ida y un kilómetro de regreso en* 15 *minutos. ¿Cuál era la velocidad, en km/h, de la corriente del río ese día?* R: 3

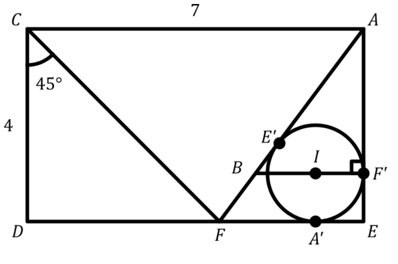
Solución: Si v es la velocidad de la corriente, la lancha avanza a $(9+v)\ km/h$ cuando va a favor de la corriente y a $(9-v)\ km/h$ cuando va en contra de la corriente. Si t_1 es el tiempo que tarda cuando va con la corriente a su favor, entonces se cumple que $(9+v)t_1 = 1$. Y si t_2 es el tiempo que tarda en recorrer el kilómetro cuando va contra corriente entonces $(9-v)t_2 = 1$. Nos dicen que $t_1 + t_2 = \frac{1}{4}h$, luego $\frac{1}{4} = t_1 + t_2 = \frac{1}{9+v} + \frac{1}{9-v}$. Esto es equivalente a $\frac{18}{9^2-v^2} = \frac{1}{4}$, es decir $4 \cdot 18 = 81 - v^2$, por lo que $v^2 = 81 - 72 = 9$ y entonces $v = 3$ km/h.

Problema 12 *(SINALOA) En la siguiente figura, $ACDE$ es un rectángulo y se han dibujado la circunferencia inscrita al triángulo AFE y su diámetro paralelo al lado FE. Encuentra la longitud (en cm) de AB.* R: 15/4



Solución: Denotemos por r y s los valores del inradio y el semiperímetro del triángulo AFE, respectivamente. Tenemos que Área$(AFE) = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, por otro lado

$$Área\,(AFE) = s \cdot r = \left(\frac{3+4+5}{2}\right) \cdot r = 6r \Rightarrow 6r = 6 \Rightarrow r = 1.$$



Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

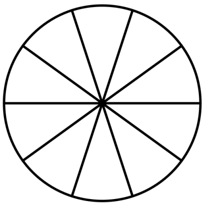
Siendo A' y F' como en la figura e I el incentro del $\triangle AFE$, $IF'EA'$ forman un cuadrado de lado $r = 1$, por lo que $EF' = 1$ y por Tales se concluye que

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AF'}{F'E} \Rightarrow AB = \frac{AF' \cdot AF}{F'E} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}.$$

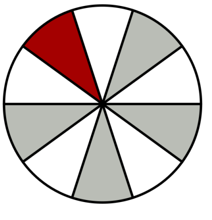
Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Parte B

Problema 13 *(COMITÉ) En cada una de las 10 regiones en que se ha dividido el círculo de la figura se colocan 3 fichas. Un movimiento consiste en mover una ficha a una región vecina (es decir, a una región que comparte un radio). ¿Es posible que después de 2018 movimientos todas las fichas se encuentren en la misma región? Justifica tu respuesta.*



Solución: La respuesta es no. Supongamos que sí es posible hacerlo, y pintemos de negro la región correspondiente. Coloreamos las nueve regiones restantes alternadamente de gris y blanco como se muestra en la figura.



Observamos que si una ficha se encuentra en una región pintada de blanco, entonces requirirá de un número impar de movimientos para llegar a la región roja, en tanto que una ficha ubicada en una región negra ocupará un número par de movimientos. De ese modo, hay $3 \times 5 = 15$ fichas que requerirán cada una un número impar de movimientos para llegar a la región negra, haciendo un total impar de moviemientos. Por otro lado, las fichas de las casillas grises requieren un total par de movimientos. Así, el número de movimientos para llegar a la configuración deseada debe ser necesariamente impar, y por tanto no puede ser 2018.

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 14 *(COMITÉ) Ana tiene cuatro hermanas -Berta, Ceci, Diana y Elena-. Su edad actual es un número impar menor que 30. Cuando Berta tenga el triple de la edad de Ana se cumplirán las aiguientes relaciones:*

1. *La suma de las edades que tendrán en ese entonces Ana y Ceci será igual a la suma de las edades actuales de todas las hermanas.*
2. *La edad de Diana será el triple de su edad actual.*
3. *La edad de Elena será un año más que el doble de la edad actual de Berta.*

Halla la suma de las edades de Ana y Berta.

Solución Sea x la cantidad de años entre el presente y el momento en el que Berta tenga el triple de la edad actual de Ana. Entonces, los enunciados se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} B+x &= 3A, && (1)\\ A+x+C+x &= A+B+C+D+E, && (2)\\ D+x &= 3D, && (3)\\ E+x &= 2B+1. && (4) \end{aligned}$$

De la ecuación (3) podemos ver que $x = 2D$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones (2) y (4) y resolviendo el sistema resultante obtenemos

$$D = \frac{3B+1}{5}, \quad E = \frac{4B+3}{5}.$$

Sustituyendo $x = 2D = \frac{6B+2}{5}$ en la ecuación (1) obtenemos

$$15A = 11B + 2.$$

Además, como A es impar entonces $11B+2$ debe terminar en 5, por lo que B debe terminar en 3. Por otro lado, como $A \leq 29$ entonces tenemos la desigualdad

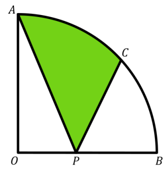
$$B = \frac{15A-2}{11} \leq \lfloor \frac{15 \cdot 29 - 2}{11} \rfloor = 39,$$

así que $B = 3, 13, 23, 33$. Probando estos casos, verificamos que la única solución entera es $B = 23$ y $A = 17$. Por lo tanto, la suma de las edades de Ana y Berta es $23 + 17 = 40$.

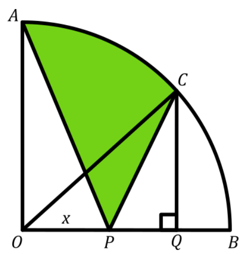
Nota: También se puede resolver la ecuación diofantina por los métodos usuales y encontrar que $B = 23$ es la única solución impar con $1 \leq A \leq 29$.

Problema 15 *(COMITÉ) En la figura, el sector AOB representa una cuarta parte de un círculo de radio $r = 1$ y el punto C satisface que $\angle BOC = 45°$. Sea P un punto sobre segmento OB (distinto de O y de B). Se trazan los segmentos AP y CP para conformar la región sombreada. Demuestra que el área de la región sombreada es menor al área de la región sin sombrear.*

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3



Solución 1: Sean $x = OP$ y Q el pie de la altura de C sobre OB.



Notemos que la región sin sombrear está compuesta de dos partes. Primero, Área$(OAP) = r \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$. El área de la segunda parte se puede calcular restando al área del sector COB el área de $\triangle OCP$. Ahora bien, $\triangle OCQ$ es rectángulo isósceles de hipotenusa $r = 1$, así que $CQ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por tanto

$$\acute{A}rea(\text{sector } COB) - \acute{A}rea(OCP) = \frac{\pi}{8} - \frac{x(1/\sqrt{2})}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2\sqrt{2}}.$$

De este modo, tenemos la desigualdad

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}x > \frac{\pi}{8}.$$

En otras palabras, la región sin sombrear tiene siempre un área mayor a la mitad del área del sector OAB. En consecuencia, la región sombreada siempre tndrá menor área que la región sin sombrear.

Solución 2: Sea R la intersección de AP y OC. Es claro que $\acute{A}rea(AOP) > \acute{A}rea(COP)$ ya que estos triángulos tienen por base común a OP, y la altura desde A es mayor a la altura desde P. Como el triángulo ROP es común a estos dos triángulos se tiene que $\acute{A}rea(AOR) > \acute{A}rea(CRP)$, luego

$$\acute{A}rea(\text{región sombreada}) < \acute{A}rea(\text{sector } AOC) \leq \acute{A}rea(\text{región sin sombrear})$$

II Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica

Mérida, Yucatán, junio 9-12, 2018.

Prueba por Equipos

Nivel III

Estado: ________________________________
Integrantes:

____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales. Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirá de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 1 *(TABASCO) Sea* $A = \{2, 5, 8, 11, \ldots, 2018\}$, *cada número a partir del segundo, es el anterior más 3. Determina el mínimo valor k tal que si escogemos k números del conjunto A, necesariamente hay dos distintos cuya suma sea 2020.*

Solución: Notemos primero que $A = \{3n + 2 : 0 \leq n \leq 672\}$, queremos asegurar que existen n y m tales que $3n + 2 + 3m + 2 = 2020$, es decir $n + m = 672$. Agrupamos los números del 0 al 672, en los conjuntos

$$\{0, 672\}, \{1, 671\}, \ldots, \{335, 337\} \, \{336\}.$$

Notemos que cada uno de ellos, excepto el conjunto $\{336\}$ es de la forma $\{n, 672 - n\}$, garantizando así que si escogemos dos números del mismo conjunto, hallamos la pareja $(3n+2, 3(672-n)+2)$ cuya suma es 2020. Usando el principio de las casillas necesitaríamos al menos 338 números para garantizar que esto pasa. Entonces $k = 338$.

R : 338

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 2 *(COMITÉ) Todos los números impares se dividen en grupos como se indica:*

$$\{1\},\ \{3,5\},\ \{7,9,11\},\ \{13,15,17,19\},\ \ldots$$

¿Cuál es la suma de los elementos del décimo grupo?

Solución: Después de hacer algunos casos, surge la conjetura que la suma de los elementos del n-ésimo grupo es n^3. Para demostrarlo, notemos que el n-ésimo grupo está conformado por los los impares desde $2\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)+1$ hasta $2\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)-1$. Como la suma $1+3+5+\cdots+2k-1$ es igual a k^2, entonces tenemos que los elementos del n-ésimo bloque suman

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2=\frac{(n^4+2n^3+n^2)-(n^4-2n^3+n^2)}{4}=n^3.$$

Por tanto, la respuesta es $10^3=1000$.

Criterio 1

15 puntos Encontrar el primer ellemento del conjunto (91).

10 puntos Encontrar último elemento del conjunto (109).

10 puntos Sumar correctamente (1000).
(Escribir COMPLETAMENTE el conjunto y fallar la suma son **35 puntos**)

Criterio 2

10 puntos Conjeturar n^3.

13 puntos Ubicar algebraicamente los extremoe de un bloque.

10 puntos Expresar suma del $k-$esimo bloque.

5 puntos Simplificar.

2 puntos Concluir.

R: 10^3

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 3 *(COMITÉ) Un triángulo ABC tiene sus vértices sobre una circunferencia con centro O, además se cumple la siguiente propiedad: si O, C' son simétricos con respecto a C se cumple que $\angle CC'A = \angle ABC$. Encuentra el valor (en grados) del ángulo $\angle ABC$.*

Solución: Sea $\beta = \angle ABC$. Consideremos a O' el centro del circuncírculo de ACC'. Por la medida del ángulo inscrito $\angle CO'A = 2\angle CC'A = 2\angle ABC = 2\beta$. Tenemos también por ser isósceles los triángulos $AO'C$ y AOC, que $\angle O'AC = \angle ACO' = 90° - \beta = \angle COA = \angle OCA$, por lo que son congruentes los triángulos $AO'C$ y AOC, luego $O'C = O'A = OA = OC$. Como $\angle OCO' = 180° - 2\beta$, se tiene que $\angle O'CC' = 180° - \angle OCO' = 2\beta$ y $O'C = OC = CC'$ y como $O'C = O'C'$ (ya que O' es el centro del circuncírculo de ACC'), luego $CC'O'$ es un triángulo equilátero, de donde $\angle O'CC' = 2\beta = 60°$, por lo que $\beta = 30°$.

R: 60°

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 4 *(MICHOACÁN) Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, r) tales que el número $N = a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 + (a+3r)^2 + (a+4r)^2$ tenga todas sus cifras iguales.*

Solución: Sea $c = a + 2r$, entoncesl

$$N = (c-2r)^2 + (c-r)^2 + c^2 + (c+r)^2 + (c+2r)^2 = 5c^2 + 10r^2$$

tiene todas su cifras iguales. Como N es divisible entre 5 entonces acaba en 5 o 0. Luego todas las cifras del N deberán ser 0 o 5. El primer caso implica que $N = 0$ y en consecuencia $a = r = 0$, lo cual es absurdo. En el segundo caso tenemos que $\frac{N}{5} = c^2 + 2r^2$ tiene todas sus cifras iguales a 1. Por tanto, si $N/5$ tiene tres cifras o más, entonces $N/5 \equiv 111 \equiv 7 \mod 8$. Sin embargo, dado que los cuadrados son congruentes a 0,1 o 4 mod 8 entonces tenemos que $c^2 + 2k^2$ es conguente a 0,1,2,4 o 6 mod 8, lo cual es contradictorio. Por tanto tenemos que $N/5 = 1$ o $N/5 = 11$. El primer caso implica $k = 0$ por lo que $a = b = c = d = e = 1$, llegando nuevamente a un absurdo. Finalmente, al resolver $c^2 + 2k^2 = 11$ obtenemos $c = 3$ y $k = 1$. De este modo, la única solución es la progresión $1, 2, 3, 4, 5$.

Criterio.

5 pts. Demostrar que 5 divide a N.

10 pts. $N = 55\ldots5$ o $N = 00\ldots0$ y descartar $(0, 0)$.

5 pts. Encontrar la pareja $(1, 1)$.

20 pts. Demostrar que $(a, r) \neq (1, 1)$ no funciona.

R: $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 5 *(TABASCO) Los números creativos son números de 4 cifras abcd tales que los números de dos cifras ab, cd son ambos pares. Además, la suma de sus dígitos es un número primo. Por ejemplo, 2018 es número creativo, ya que $ab = 20$ y $cd = 18$ son números pares de dos cifras y su suma $2+0+1+8 = 11$ es un número primo. ¿Cuántos números creativos menores o iguales al 2018 hay?*

Solución: Haremos una demostración por casos. Como $abcd < 2108$ entonces tenemos que $a = 1$ o $a = 2$. Cuando $a = 1$ entonces tenemos la ecuación

$$b + c + d = p - 1$$

Si $p = 2$, entonces la única solución es $b = d = 0$, $c = 1$, por lo que el único número creativo en este caso es 1010. Si p es un primo impar, dado que b y d son pares, por paridad concluimos que c también lo es. Además, como cd es un número de dos cifras tenemos que $c \neq 0$. Por tanto, podemos hacer el cambio de variables $b = 2B$, $c = 2(C+1)$, $d = 2D$ y transformar la ecuación anterior en

$$B + C + D = \frac{p-3}{2}$$

sujeta a las condiciones $0 \leq B \leq 4$, $0 \leq C \leq 3$, $0 \leq D \leq 4$. Por tanto tenemos que $\frac{p-3}{2} \leq 4+3+4 = 11$ y en consecuencia $p \leq 25$. La siguiente tabla ilustra los valores correspondientes a los primos p que cumplen la desigualdad.

p	3	5	7	11	13	17	19	23
$\frac{p-3}{2}$	0	1	2	4	5	7	8	10

En cada caso se puede resolver la ecuación usando el método de separadores y el principio de inclusión-exclusión. La siguiente tabla muestra todas las posibilidades:

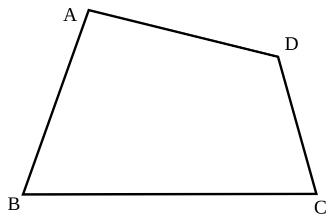
$\frac{p-3}{2}$	Soluciones	Total
0	$\binom{2}{2}$	1
1	$\binom{3}{2}$	3
2	$\binom{4}{2}$	6
4	$\binom{6}{2} - \binom{2}{2}$	14
5	$\binom{7}{2} - \left[\binom{3}{2} + 2\binom{2}{2}\right]$	16
7	$\binom{9}{2} - \left[\binom{5}{2} + 2\binom{4}{2}\right]$	14
8	$\binom{10}{2} - \left[\binom{6}{2} + 2\binom{5}{2}\right]$	10
10	$\binom{12}{2} - \left[\binom{8}{2} + 2\binom{7}{2}\right] + \left[2\binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right]$	3

Así que hay un total de 67 soluciones en este caso. Finalmente, consideremos el caso $a = 2$ tenemos que p debe ser impar y las únicas posibilidades son 2010, 2012, 2014 y 2018. Hemos probado así que hay $1 + 67 + 4 = 72$ números creativos.

R: 72

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 6 *(COMITÉ) Sea $ABCD$ un cuadrilátero, como se indica en la figura. Muestra que si los cuatro triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, tienen el mismo perímetro, entonces $ABCD$ es un rectángulo.*



Solución: Supongamos que $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ y $f = BD$. Si los perímetros de los triángulos son iguales, se tiene que

$$a + b + e = b + c + f = c + d + e = d + a + f$$

Luego

$$\begin{aligned} a + e &= c + f \\ b + f &= d + e \\ c + e &= a + f \\ b + e &= d + f \end{aligned}$$

de donde: $a - c = f - e = d - b = e - f$. Ahora como, $f - e = e - f$, se tiene que $e = f$. Luego $a = c$, $f = e$, $d = b$. Pero un cuadrilátero con lados opuestos iguales y con las diagonales iguales, tiene que ser un rectángulo.

Criterio.

10 pts. Plantear sus ecuaciones y su igualdad.

12 pts. Utilizar las ecuaciones para ver la igualdad entre los lados.

14 pts. Utilizar las ecuaciones para que las diagonales son iguales.

4 pts. Concluir: como las diagonales son iguales, es rectngulo

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 7 *(HIDALGO) Consideramos un tablero de 8×8. El **Batab** es una pieza que puede moverse de una casilla a otra vecina (que comparte un lado). Un* **camino del Mayab** *es un camino que va de una casilla inicial a una final tal que:*

1. *Consta exclusivamente de movimientos del Batab.*
2. *En cada paso se aleja del punto inicial y se acerca al punto final.*

Se coloca una ficha verde en una casilla y una ficha naranja en otra distinta. Y luego se coloca una ficha blanca en una casilla que está dentro de un camino del Mayab que va de la ficha verde a la ficha naranja. Llamamos T al número total de caminos del Mayab que van de la ficha verde a la naranja pasando por la ficha blanca. Encuentra el número total de formas distintas en que se pueden colocar las tres fichas de modo que 49 divida a T.

Solución: Observemos primero que el número de caminos del Mayab que van de una casilla x a una casilla y es igual a $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$ donde m es el número de casillas que hay que recorrer en dirección horizontal para ir de x a y, y n las que hay que recorrer en dirección vertical. Entonces tenemos que

$$T = \binom{a+b}{a}\binom{c+d}{c}$$

donde el primer factor corresponde al recorrido de la ficha verde a la blanca, y el segundo al recorrido de la ficha blanca a la naranja. El camino del Mayab más largo, correspondiente a ir de una esquina del tablero a la opuesta en diagonal, tiene 14 movimientos. Como la ficha blanca no puede estar en una esquina se tiene que $a+b \leq 13$ y $c+d \leq 13$, y se sigue que en los coeficientes binomiales considerados a lo mucho hay un factor 7, por lo que 49 no puede dividir a ninguno de los dos. Por lo tanto 7 divide a ambos.

Ambos recorridos tienen que tener entonces al menos 7 movimientos, y como la suma de ambos no puede exceder 14, por fuerza $a+b = 7 = c+d$. Esto corresponde a que el camino del Mayab de la verde a la naranja tiene 14 movimientos, y por lo tanto ambas fichas deben estar en esquinas opuestas del tablero. El valor de a y el de c es cualquier número del 1 al 6, lo que significa que la ficha blanca puede estar en cualquier casilla del interior del tablero (que no esté en las orillas). Con esto, obtenemos el valor de $T = 4 \cdot 36 = 144$ (4 formas de elegir la esquina verde y 36 de colocar la blanca).

R: 144

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

Problema 8 *(COMITÉ) Los gemelos Adán y Beto van de su casa a la escuela. Adán, corre la mitad del trayecto y camina la otra mitad, mientras que Beto corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad del tiempo. Los dos corren a una misma velocidad v_1 y los dos caminan a una misma velocidad v_2. ¿Quién de ellos llega primero? Justifica tu respuesta.*

Solución: Sean d la distancia entre la casa y la escuela, v_1 la velocidad en que corren y v_2 la velocidad en que caminan. Si Adan tarda t_1 horas en correr la mitad del trayecto y t_2 horas en caminar la otra mitad, se tiene que $\frac{d}{2} = v_1 t_1 = v_2 t_2$. Por lo que su recorrido lo hace en el tiempo

$$t_1 + t_2 = \frac{d}{2v_1} + \frac{d}{2v_2} = \frac{d}{2}\left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right).$$

Por otro lado Beto se mueve con diferentes velocidades en tiempos iguales, si tarda t horas en hacer el recorrido, entonces

$$d = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}, \text{ por lo que } t = \frac{2d}{v_1 + v_2}.$$

Ahora comparemos los tiempos en que tardan en llegar,

$$\frac{t_1 + t_2}{t} = \frac{\frac{d}{2}\left(\frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}\right)}{\frac{1}{v_1+v_2}} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{4v_1 v_2}.$$

Pero $v_1 v_2 \leq \left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2$ (por la desigualdad $MG - MA$), por lo que $\frac{t_1+t_2}{t} \geq 1$, y entonces $t_1 + t_2 \geq t$, pero a menos que $v_1 = v_2$, se tiene que $t_1 + t_2 > t$; en consecuencia Beto llega primero.

Criterio.

- **(7pt)** Traducir *Adán corre la mitad del trayecto, camina la otra mitad,*

$$\frac{d}{2} = v_1 t_1 = v_2 t_2$$

- **(7pt)** Traducir *Beto corre la mitad de tiempo y camina la otra mitad,*

$$d = d_1 + d_2 = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}$$

- **(7pt)** Encontrar el tiempo de recorrido de Adán:

$$T_A = t_1 + t_2 = \frac{d}{2}\left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right).$$

- **(7pt)** Encontrar el tiempo de recorrido de Beto:

$$T_B = \frac{2d}{v_1 + v_2}$$

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 3

- **(8pt)** Comparar:
$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{(v_1+v_2)^2}{4v_1v_2} \geq 1$$
ó
$$T_A - T_B = d\frac{(v_1-v_2)^2}{2v_1v_2(v_1+v_2)} \geq 0$$
- **(2 pts)** Concluir: $v_1 = v_2$, entonces llegan al mismo tiempo (detalle)
- **(2 pts)** $v_1 \neq v_2$, entonces Beto llega primero.

Criterio 2.

5 pts $v_1 \geq v_2$

10 pts. Beto corre ms distancia que la que camina.

20 pts. Comparar tramo a tramo efectivamente.

5 pts. Concluir.