Soluciones Nivel 2

Individual

PARTE A

Problema 1. (Nuevo León) Juan nació después del año 1970 pero antes del 2000. Si en el año n^2 Juan cumple n años, ¿cuántos años cumple Juan en el año 2020?

R:40

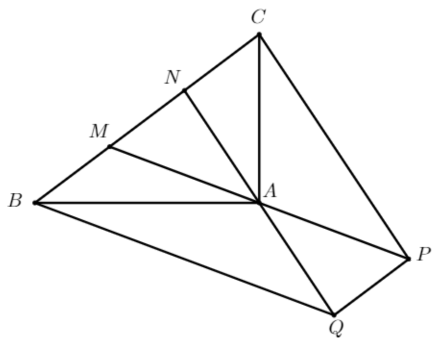
Solución. Como Juan nació antes del 2000, su año de nacimiento es el año actual n^2 menos la edad que tiene n. Así, $1970 < n^2 - n < 2000$. Puesto que $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ y $46^2 = 2116$, entonces Juan no puede cumplir 46 en el 46^2 ni 44 en el 44^2, así que debe cumplir 45 en 2025, de modo que nació en 1980 y este año cumplió 40 años.

Problema 2. (Zacatecas) Un píxel está formado por 3 leds: uno rojo, uno verde y uno azul, donde cada uno puede prender con 4 intensidades de luminosidad diferentes (además de que pueden estar apagados). Cada configuración de estos tres leds determina el color del píxel. ¿Cuántas configuraciones hay con el led azul prendido?

R:100

Solución. Las posibilidades de que el led azul esté prendido son 4. Cada uno del led rojo y el azul tienen 5 posibilidades. Entonces el resultado es $4 \times 5 \times 5 = 100$.

Problema 3. (Puebla) Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle BAC = 90°$ y área $12\,\text{cm}^2$. Sean M y N puntos en la hipotenusa BC tales que $BM = MN = NC$. Se prolongan los segmentos MA y NA más allá de A, hasta los puntos P y Q tales que $MA = AP$ y $NA = AQ$. Encontrar el valor del área del cuadrilátero $BCPQ$ en cm^2.



R:32

Solución. Como M y N dividen al segmento BC en tres partes iguales, las áreas de de los triángulos ACN, NAC y MAB son todas iguales a $\frac{12}{3} = 4$. También tenemos que los triángulos NAM y QAP son congruentes y así el área de QAP

es 4. Por otro lado, los triángulos BAQ y BAN tienen la misma altura desde B y la misma base pues $NA = AQ$, así que el área de ABQ es 8. El mismo razonamiento aplica para determinar que el área de CAP es 8. Entonces el área total es $8 + 8 + 4 + 4 + 4 + 4 = 32\,\text{cm}^2$.

Problema 4. (Tlaxcala) Una máquina A es capaz de cortar una determinada área de césped en 120 minutos. Una máquina B corta esa misma área en 240 minutos. Si se ponen a trabajar las dos máquinas al mismo tiempo para cortar esa área, ¿en cuántos minutos estará cortado el césped?

R:80

Solución. En una hora, A poda la mitad del césped y B poda la cuarta parte, de manera que entre las dos podan $\frac{3}{4}$ partes del área total. Necesitan podar una cuarta parte más, es decir, un tercio de lo que podan en una hora. Como $\frac{60}{3} = 20$, la cantidad total de minutos es $60 + 20 = 80$.

Problema 5. (Coahuila) En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

R:24

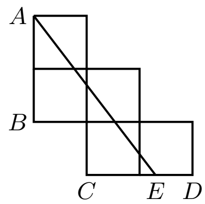
Solución. Como hay 9 monedas, entonces hay $\binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$ maneras de quitar dos monedas. Ahora, falta contar la cantidad de maneras en que se pueden quitar dos monedas que comparten un lado, lo cual es equivalente a contar cuantas aristas tiene una cuadrícula de 3×3 sin contar las del exterior. Es fácil ver que hay 12 de estas aristas, por lo que en total hay $36 - 12 = 24$ maneras de quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado.

Problema 6. (Yucatán) Cada número de 3 cifras decimales se divide entre la suma de sus 3 cifras y da un resultado. Por ejemplo, el número 207 se divide entre $2 + 0 + 7 = 9$ y el resultado es $\frac{207}{9} = 23$. ¿Cuál es el mayor valor que se puede obtener como resultado, al considerar todos los números de tres cifras?

R:100

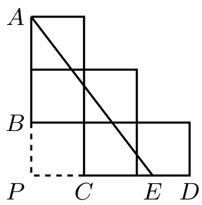
Solución. Notamos primero que el cociente entre dos números es más grande cuando el numerador es lo máximo posible y el denominador es lo mínimo posible. Si la suma de cifras es cualquier número entero entre 1 y 9, lo máximo que puede ser el cociente es 100 pues, por ejemplo si la suma fuera 7, el mayor numerador que puede tener suma de dígitos igual a 7 es 700 y entonces $\frac{700}{7} = 100$. Si la suma de los dígitos es 10 o más, como el numerador a lo más es 999, entonces el cociente es menor o igual a $\frac{999}{10} = 99.9$. La respuesta es 100.

Problema 7. (Comité) La siguiente figura está formada por 5 cuadrados iguales de área $36\,\text{cm}^2$ cada uno. Los puntos A, B, C y D son vértices de cuadrados. El punto E del segmento CD es tal que el segmento AE divide a los 5 cuadrados en dos partes de la misma área. Determinar la medida, en cm, del segmento CE.



R:8

Solución. El área de los 5 cuadrados es $36 \times 5 = 180\,\text{cm}^2$, así que buscamos que AE parta la figura en dos regiones de área $90\,\text{cm}^2$ cada una. Completemos la figura con un cuadrado como se muestra en la figura. Como cada cuadrado tiene 6 cm de lado, se tiene que $AP = 18$ y $PE = 6 + CE$.



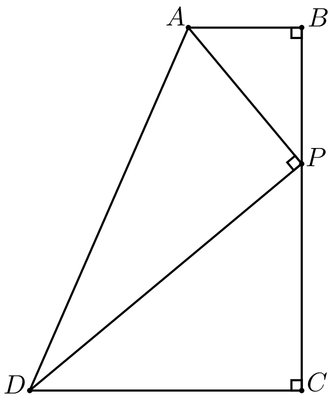
De esta manera, $\frac{18(6+CE)}{2} = 90 + 36 = 126$, de donde $18(6 + CE) = 252$ y entonces $CE = \frac{252}{18} - 6 = 14 - 6 = 8$.

Problema 8. (Baja California) ¿Cuántos números de la lista $1, 2, 3, \ldots, 2019, 2020$ tienen al menos un dígito igual a 2 o 0?

R:924

Solución. Contemos la cantidad de números en la lista que no tienen ningún dígito igual a 0 o a 2. Hay 8 opciones en las que el número tiene un dígito, $8\times 8 = 64$ en las que el número tiene 2 dígitos, $8\times 8\times 8 = 512$ con 3 dígitos y $1\times 8\times 8\times 8 = 512$ con 4 dígitos. En total, hay $8 + 64 + 512 + 512 = 1096$ números cuyos dígitos no son ni 2 ni 0, por lo que la cantidad de números que tienen al menos un dígito igual a 2 o 0 es $2020 - 1096 = 924$.

Problema 9. (Yucatán) En la siguiente figura se tiene $AB = 5$ cm, $BC = 16$ cm y $DC = 12$ cm. Si $BP < PC$, ¿cuánto mide, en cm^2, el área del triángulo APD?



R:61

Solución. Nótese que los triángulos ABP y PCD son semejantes, por lo que $\frac{AB}{BP} = \frac{PC}{CD}$, es decir, $\frac{5}{BP} = \frac{16-BP}{12}$. Como $BP < PC$, entonces $BP = 6$ cm y $PC = 16 - BP = 10$ cm. Por el teorema de Pitágoras, $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{61}$ cm y $PD = \sqrt{CD^2 + PC^2} = 2\sqrt{61}$ cm. Por lo tanto, el área del triángulo APD es $\frac{AP\times PD}{2} = 61$ cm^2.

Problema 10. (Chiapas) Se consideran todos los enteros positivos que se construyen escribiendo consecutivamente los primeros números enteros positivos. Por ejemplo, el que aparece en el primer lugar es el 1, en segundo lugar aparece 12, en el lugar 3 aparece 123, y así sucesivamente (en el lugar 12 aparece 123456789101112). De los números anteriores, ¿cuántos dígitos tiene el número más pequeño en el que aparece la cadena 2022? Por ejemplo, el número de dígitos del número más pequeño en el que aparece la cadena 91 es 11 pues aparece por primera vez en el décimo número 12345678**91**0, el cual tiene 11 dígitos.

R:501

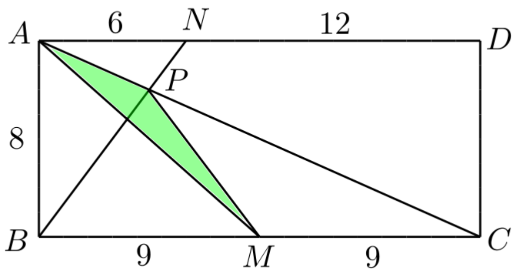
Solución. El número 20 solamente aparece antes del 200 en 20 y en 120 y ahí no aparece 2022. Entonces la secuencia 2022 aparece por primer lugar en el lugar 203: $123\ldots 202203$. Contemos los dígitos usados: Del 1 al 9 hay 9 dígitos; del 10 al 99 hay $2 \times 90 = 180$ dígitos, del 100 al 199 hay $3 \times 100 = 300$ dígitos y, finalmente, del 200 al 203 hay $3 \times 4 = 12$ dígitos. El total es $9 + 180 + 300 + 12 = 501$.

Problema 11. (Chiapas) ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos (distintos) del conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ cumplen que el producto de los 3 números del subconjunto es divisible entre 4? Nota: Los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$ y $\{2, 3, 1\}$ se consideran iguales.

$\boxed{\text{R:}795}$

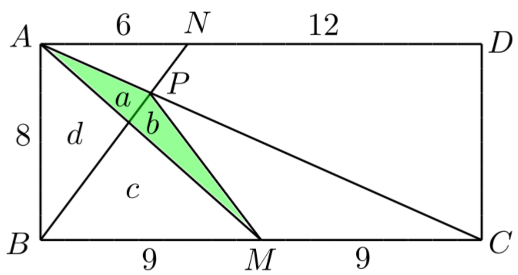
Solución. Hay $\binom{20}{3} = \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$ subconjuntos de 3 elementos de X. Para que un subconjunto de 3 elementos no cumpla con la condición puesta, es porque o bien los tres números deben son impares o bien porque hay dos impares y uno par no múltiplo de 4. En el primer caso hay $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$ subconjuntos; en el segundo hay $5\binom{10}{2} = \frac{5\times10\times9}{2} = 225$. Por lo tanto, la respuesta es $1140 - 120 - 225 = 795$.

Problema 12. (San Luis Potosí) En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ con $AB = 8$ cm y $BC = 18$ cm; M es el punto medio de BC, N es el punto del segmento AD tal que $AN = 6$ cm, y P es el punto de intersección de AC con BN. Determinar el área, en cm^2, del triángulo APM.



$\boxed{\text{R:}9}$

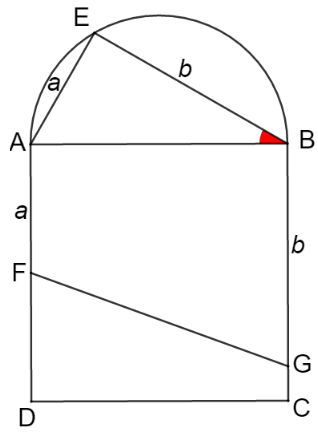
Solución. Sean h y H las respectivas alturas de los triángulos APN y CPB desde P. Como estos triángulos son semejantes en razón $1 : 3$, tenemos que $3h = H$; además $H + h = 8$, de donde $h = 2$ cm y $H = 6$ cm.
Ahora, sean a, b, c y d las áreas que se indican en la siguiente figura.



Notamos que $a + b = (a + d) - (d + c) + (c + b)$. Pero $a + d = \frac{6\times8}{2} - \frac{6\times2}{2} = 18$, $d + c = \frac{9\times8}{2} = 36$ y $c + b = \frac{9\times6}{2} = 27$, de manera que $a + b = 18 - 36 + 27 = 9$ cm^2.

PARTE B

Problema 13. (Baja California) Sea $ABCD$ un cuadrado. Se dibuja, por fuera del cuadrado, un semicírculo que tenga al lado AB como diámetro. Se escoge un punto E en la semicircunferencia. Sean G y F puntos de los segmentos BC y AD, respectivamente, tales que $GB = BE$ y $AF = AE$. Sean $a = AF$ y $b = GB$. Si las áreas entre $ABGF$ y $FGCD$ están a razón $\frac{a+b}{3a-b}$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle EBA$?



Solución. Por el teorema de Pitágoras, se tiene que $AB = \sqrt{a^2+b^2}$. Luego, $[ABGF] = \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ y, por tanto, $[FGCD] = [ABCD] - [ABGF] = a^2+b^2 - \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Se sigue entonces que

$$\frac{a+b}{3a-b} = \frac{[ABGF]}{[FGCD]} = \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Esta última ecuación implica que $2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)\sqrt{a^2+b^2} = (3a-b)\sqrt{a^2+b^2}$, es decir, $2\left(a^2+b^2\right) = 4a\sqrt{a^2+b^2}$ y, por consiguiente, $b = \sqrt{3}a$. Esto significa que el triángulo AEB es la mitad de un triángulo equilátero. Por lo tanto, $\angle EBA = 30°$.

Problema 14. (Sinaloa) Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1}+1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

Solución. Tomemos $a \equiv 0 \bmod 9$. Entonces podemos formar la siguiente lista módulo 9:

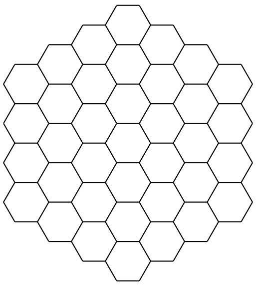
$$\begin{aligned}
x_0 &\equiv 0\\
x_1 &\equiv 5(0)+1 = 1\\
x_2 &\equiv 5(1)+1 = 6\\
x_3 &\equiv 5(6)+1 \equiv 4\\
x_4 &\equiv 5(4)+1 \equiv 3\\
x_5 &\equiv 5(3)+1 \equiv 7\\
x_6 &\equiv 5(7)+1 \equiv 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por esta razón, si $a \equiv 0,1,3,4,6,7 \bmod 9$, entonces este ciclo se repite y llegamos a algún $x_k \equiv 0 \bmod 9$, dejando fuera del ciclo las congruencias 2, 5 y 8.

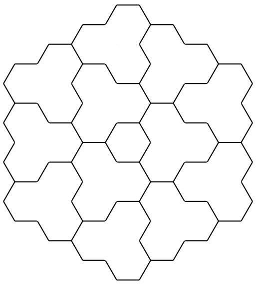
- Si $x_i \equiv 2$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(2)+1 \equiv 2$.
- Si $x_i \equiv 5$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(5)+1 \equiv 8$.
- si $x_i \equiv 8$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(8)+1 \equiv 5$.

Así, cualquier a con estas congruencias módulo 9 cumple las condiciones del problema. Nótese que esto equivale a que $a \equiv 2 \pmod 3$. Por lo tanto, hay 673 números menores o iguales a 2020 que cumplen.

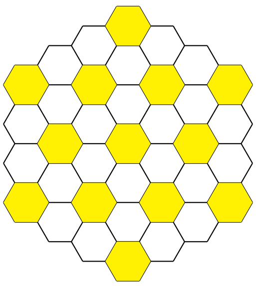
Problema 15. (Michoacán) En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?



Solución. En la siguiente partición de los hexágonos, se tiene que a lo más un hexágono de cada parte puede estar coloreado.



Con lo anterior se demuestra que no pueden vivir más de 13 abejas en el panal. Con la siguiente elección nos podemos dar cuenta que sí pueden vivir 13 abejas en el panal.



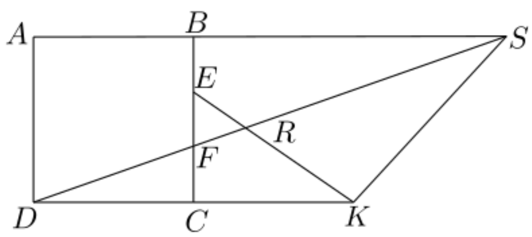
Equipos

Problema 1. (Tabasco) Determinar la cantidad de números enteros que son múltiplos de 3 y tienen 5 dígitos distintos escogidos dentro de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ pero dos de sus dígitos son 1 y 2, en ese orden. Por ejemplo, 31725 y 31254 son números de los que queremos, mientras que 32715 y 31724 no.

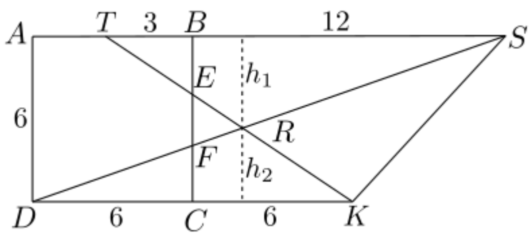
R:240

Solución. Tenemos $\binom{5}{2} = 10$ formas de escoger las posiciones donde pondremos al dígito 1 y al dígito 2. Por el criterio de divisibilidad del 3, para que el número resultante sea múltiplo de 3, la suma de sus dígitos en las tres posiciones restantes debe ser múltiplo de 3 ya que 1 y 2 suman 3. Ahora encontraremos las ternas de números distintos a, b, c en el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $a + b + c$ es múltiplo de 3. Observemos que la única manera de lograr ternas de números distintos que sumen un múltiplo de 3, es escogiendo un dígito entre 3 y 6, uno entre 4 y 7 y escogiendo el dígito 5. Luego, las ternas posibles son $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 7, 5\}$, $\{6, 4, 5\}$ y $\{6, 7, 5\}$. Si $N = abc$ es el número de tres dígitos que se forma con las tres posiciones restantes después de colocar al 1 y al 2, entonces por cada una de las ternas anteriores, obtenemos 6 valores de N, lo que hace un total de 24 valores posibles de N. Por lo tanto, en total hay $10 \times 24 = 240$ números que satisfacen las condiciones del problema.

Problema 2. (Coahuila) En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ de área 36 cm^2. Los puntos E y F sobre BC son tales que $BE = EF = FC$; el punto K sobre la recta CD es tal que C es el punto medio del segmento DK. La recta DF intersecta a las rectas EK y AB en R y S, respectivamente. Determinar el área, en cm^2, del triángulo KRS.



Solución. Notemos que los triángulos BFS y CFD son semejantes en razón $2:1$ pues BS es paralela a CD y $BF = 2FC$, por lo que $BS = 12$ cm. Sea T la intersección de EK con AB. Análogamente los triángulos TBE y KCE son semejantes en razón $1:2$, lo que implica que $BT = 3$ cm.



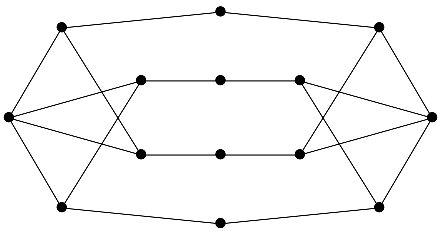
Ahora, obsérvese que los triángulos TRS y KRD son semejantes por ser TS y DK paralelas y $\angle DRK = \angle SRT$, y de ahí que si h_1 y h_2 son las alturas desde R hasta AB y CD, respectivamente, entonces $\frac{h_1}{h_2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, así que $5h_2 = 4h_1$ y, como $h_1 + h_2 = 6$, se sigue $h_2 = \frac{8}{3}$ cm, por lo que $[DRK] = \left(\frac{8}{3} \times \frac{12}{2}\right) = 16$ cm^2. También, $[DKS] = \frac{12 \times 6}{2} = 36$ cm^2, y esto nos lleva a que $[KRS] = [DKS] - [DRK] = 36 - 16 = 20$ cm^2.

Problema 3. (Coahuila) ¿Cuántos números de tres dígitos, abc (con $a \neq 0$), tienen la propiedad de que los números de dos dígitos ab y bc son números primos? Por ejemplo, un número que cumple es 237 pues tanto 23 como 37 son primos.

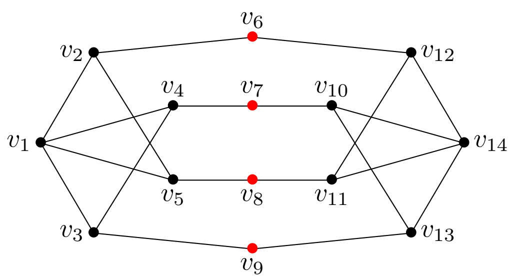
R:52

Solución. Los números primos de dos cifras tienen como dígito de las unidades a un número impar diferente de 5. Luego c solamente puede ser alguno de $1, 3, 7, 9$. Los números primos de dos dígitos que terminan en 1 son los siguientes 5 números: 11, 31, 41, 61 , 71; los que terminan en 3 son $13, 23, 43, 53, 73, 83$ que son 6; los que terminan en 7 son cinco $17, 37, 47, 67, 97$, y los que terminan en 9 son cinco $19, 29, 59, 79, 89$. Veamos las distintas posibilidades de c.
Caso $c = 1$. Hay cinco primos de la forma $b1$, pero como ab es también primo, b no puede ser 4 o 6. Luego bc es solamente uno de $11, 31, 71$; de donde el número de posibilidades para ab es $5 + 6 + 5 = 16$.
Caso $c = 3$. De nuevo hay seis posibles primos de dos cifras de la forma $b3$, pero como ab debe ser primo, solamente debemos de considerar a 13 y 73. Las posibilidades para $a1$ son cinco y para las de $a7$ son cinco. Entonces aquí tenemos 10 números abc.
Caso $c = 7$. De los cinco posibles números $b7$, solamente nos fijaremos en 17, en 37 y en 97; en los otros ab no será primo. Hay 5 primos de la forma $a1$, 6 primos de la forma $a3$ y 5 primos de la forma $a7$, así en este caso tenemos 16 números abc.
Caso 9. De igual manera solamente son de interés el 19 y el 79. Para el primero hay cinco primos de la forma $a1$ y hay cinco de la forma $a7$, por lo que en este último caso hay 10 números abc.
Luego en total hay $16 + 10 + 16 + 10 = 52$ números de tres dígitos abc con ab y bc primos.

Problema 4. (Michoacán) La siguiente figura consta de 14 vértices y 20 segmentos. Se dice que dos vértices son vecinos si hay una línea que empieza en uno de ellos y acaba en otro. Raúl quiere elegir algunos vértices de manera que entre los vértices que eligió y sus vecinos, estén elegidos todos los vértices. ¿Cuál es la mínima cantidad de vértices que debe elegir Raúl para lograr esto?

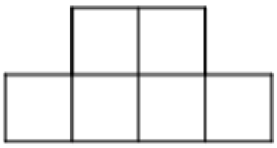


Solución. Primero vamos a etiquetar los vértices:



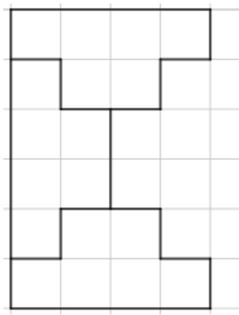
Notemos que Raúl debe elegir al menos 4 vértices de la figura ya que los vértices en rojo no son vecinos y tampoco tienen vecinos en común. Luego, eligiendo v_2, v_4, v_{11} y v_{13}, Raúl logra su cometido. Entonces debe elegir 4 vértices.

Problema 5. (Ciudad de México) Una ficha sombrero es una como la que se muestra en la figura, donde cada cuadrito es de 1×1. Se quiere cubrir una cuadrícula de 6×40 con fichas sombrero, de tal manera que las fichas no se traslapen, no se salgan del tablero y los lados de las fichas sean paralelos a los lados de la cuadrícula. ¿De cuántas formas distintas puede llenarse el tablero, considerando que las fichas pueden rotarse?

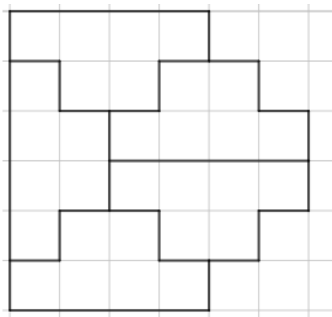


R:512

Solución. Notemos que para que las esquinas puedan llenarse, las primeras tres fichas deben colocarse como se muestra.



Después de eso hay dos opciones: colocar una ficha para completar un rectángulo, o colocar dos fichas extra como se ve en la figura,



en cuyo caso volveremos a una situación como la que se tenía. Esto muestra que cada múltiplo de 4 tenemos dos opciones para continuar el llenado del tablero, y esto será así hasta que lleguemos al final del tablero. De esta manera, en total habrá $\frac{40}{4} - 1 = 9$ momentos en los que se puede elegir, por lo que en total hay $2^9 = 512$ formas de llenar el tablero.

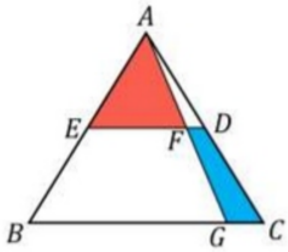
Problema 6. (Chiapas) Encontrar la suma de todos los números enteros n de tres dígitos distintos, para los cuales la suma de todos los números de dos dígitos que se pueden formar con los dígitos de n sea igual al doble de n. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces los números de dos dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos de n son 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

Solución. Podemos escribir el número n como $n = 100a + 10b + c$ con $0 \leq a, b, c \leq 9$ y $a \neq 0$. Cada número formado con dos cifras de n se puede escribir como $10x + y$ con $x \in \{a, b, c\}$, $y \in \{a, b, c\}$ y $x \neq y$. Entonces la condición del problema es equivalente a

$$\begin{aligned} 2n &= 2(100a + 10b + c) \\ &= (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b). \end{aligned}$$

Así se tiene que $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$, lo cual implica que $178a = 2b + 20c$ o bien $89a = b + 10c$.
Como $89 \leq 99$, se tiene $a \leq 1$, lo cual implica $a = 1$ y, por tanto, $b = 9$ y $c = 8$. Así $n = 198$ es el único número que satisface las condiciones.

Problema 7. (Yucatán) En la figura, ABC es un triángulo equilátero cuyos lados miden 28 cm. Los puntos medios de AB y AC son E y D, respectivamente. ¿Cuál debe ser el valor de la longitud del segmento BG, en cm, para que el área del triángulo AEF sea igual al doble del área del cuadrilátero $CDFG$?



R:24

Solución. Denotamos $[XYZ]$ por el área de XYZ. Como D y E son puntos medios de AC y AB, respectivamente, entonces $[ADE] = \frac{1}{4}[ABC]$ y $\frac{FE}{DE} = \frac{GB}{CB}$. Luego $[AFE] = \frac{FE}{DE} \times \frac{1}{4}[ABC] = \frac{GB}{4CB}[ABC] = \frac{GB}{112}[ABC]$.
Por otra parte, se sabe que $[BEFG] = 3[AFE] = \frac{3GB}{112}[ABC]$ y $[BEDC] = \frac{3}{4}[ABC]$, por lo que $[GFDC] = [BEDC] - [BEFG] = \frac{84-3GB}{112}[ABC]$. Como $[AFE] = 2[GFDC]$, se sigue que $\frac{GB}{112}[ABC] = \frac{2(84-3GB)}{112}[ABC]$, es decir, $GB = 168 - 6GB$. Por lo tanto, $GB = 24\,cm$.

Otra solución. Con la notación de la solución anterior. Sea $x = FD$, por semejanza de los triángulos AFD y AGC, se tiene que $GC = 2x$. Si h es la altura del triángulo AEF, se tiene que también h es la altura sobre las bases del trapecio $CDFG$. Ahora $[AFE] = \frac{(14-x)h}{2}$ y $[CDFG] = \frac{(x+2x)h}{2}$; si estas dos áreas cumplen que la primera es el doble de la segunda, entonces $14 - x = 6x$, de donde $x = 2$, luego $BG = 28 - 2(2) = 24\,cm$.

Problema 8. (Baja California) En un país, se tienen ciudades que inician con cada letra del abecedario (el cual cuenta con 26 letras). Hay una ciudad cuyo nombre empieza con la letra a, dos ciudades cuyos nombres empiezan con la letra b, tres ciudades con la letra c, cuatro ciudades con d y así sucesivamente. Solo se puede pasar de una ciudad a otra si las letras con las que empieza su nombre son vecinas en el abecedario; por ejemplo, c es vecino de b y d, así como a es vecino de b y z. ¿Se pueden recorrer todas las ciudades sin repetir?

Solución. Se probará que no existe tal recorrido. Para esto, se colorean las ciudades de la siguiente manera: Si una ciudad empieza con la i-ésima letra del abecedario e i es par, entonces se colorea de rojo; en caso contrario, se colorea de azul. Nótese que, si se puede pasar de una ciudad a otra, entonces éstas deben ser de colores distintos.
Si existiese un recorrido que pasa por todas las ciudades sin repetir, por la observación anterior se tendría que la cantidad de ciudades azules y la cantidad de ciudades rojas diferirían por 1 a lo mucho. Sin embargo, hay $1 + 3 + 5 + \cdots + 25 = 169$ ciudades azules y $2+4+6+\cdots+26 = 182$ ciudades rojas. Como $182-169 > 1$, se concluye que tal recorrido no puede existir.