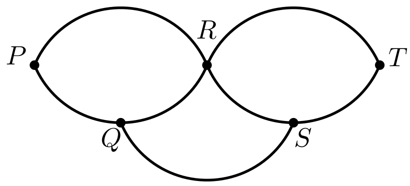
Soluciones Nivel 2

Individual

PARTE A

Problema 1. (Comité) Cinco ciudades se comunican con un sistema de carreteras como se muestra en el dibujo. ¿Cuántos caminos diferentes puede seguir una persona que quiere ir de P a T, siempre con dirección a la derecha?



R:5

Solución. Para ir de P a Q hay solamente un camino. Para ir de P a R hay dos caminos, directo desde P o pasando por Q. Para ir de P a S hay tres caminos, uno que pasa por Q y dos que pasan por R. Y finalmente para ir de P a T hay cinco caminos, dos que pasan por R y tres que pasan por S.

Problema 2. (Comité) En una dulcería hay una máquina expendedora de dulces que tiene dos botones y un recipiente; después de insertar una moneda puedes apretar un solo botón, el botón A deja caer 16 dulces en el recipiente y el botón B deja caer en el recipiente el 50% de los dulces que hay en el recipiente. Si el recipiente al inicio esta vacío, ¿cuál es la mayor cantidad de dulces que se pueden obtener con 5 monedas?

R:108

Solución. Como al inicio el recipiente está vacío, con la primera moneda y apretando el botón A se tienen 16 dulces. Con la segunda moneda, se pueden obtener otros 16 dulces o incrementar en 50% los dulces que se tienen, pero como el 50% de 16 es 8, es mejor apretar el botón A. Ahora hay 32 dulces en el recipiente. Con la tercera moneda podemos obtener 16 dulces o el 50% de los 32 dulces que es 16, luego en este caso da igual que botón apretar, al final de este paso se tendrán 48 dulces. Con la cuarta moneda, es mejor apretar el botón B ya que la máquina ahora arrojará 24 dulces que es el 50% de los 48 que había en el recipiente, ahora se tienen 72. Con la quinta moneda de nuevo conviene apretar el B, que dará 36 dulces, para tener finalmente 108 dulces.

Problema 3. (Querétaro) Los vértices de un triángulo ABC están en una circunferencia de manera que las medidas de los arcos AB, BC y CA son, respectivamente, $x + 75°$, $2x + 50°$ y $4x - 10°$. Encuentra las medidas, en grados, de los ángulos internos del triángulo ABC.
Nota. El arco AB es el que no contiene al vértice C, análogamente BC y CA, no contienen a A y B, respectivamente.

R:$\angle C = 55°$, $\angle A = 60°$ y $\angle B = 65°$

Solución. Sabemos que $\angle C = \frac{1}{2}(x+75°)$, que $\angle A = \frac{1}{2}(2x+50°)$ y que $\angle B = \frac{1}{2}(4x-10°)$. También sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Entonces obtenemos la ecuación $\frac{1}{2}(x+75°)+\frac{1}{2}(2x+50°)+\frac{1}{2}(4x-10°) = 180°$, que implica que $x = 35°$. Con este valor se obtiene que las medidas de los ángulos son $\angle C = 55°$, $\angle A = 60°$ y $\angle B = 65°$.

Problema 4. (Comité) Benito compró comida para sus 4 gatos, con la idea de que le alcanzará para 12 días. En el camino se encontró otros dos gatos que los llevó a su casa. ¿Cuántos días le durará la comida ahora con los 6 gatos?

R:8

Solución. Sea C la cantidad de comida que compró. Cada uno de los 4 gatos come en los 12 días una cuarta parte C, como son 12 días, cada gato come al día la doceava parte de $\frac{C}{4}$, esto es $\frac{C}{48}$. Como ahora tiene 6 gatos, estos comerán al día $6\frac{C}{48} = \frac{C}{8}$ de la comida. Luego la comida le durará 8 días.
Otra forma: Si Benito tuviera solamente un gato, la comida que compro C le alcanzaría para 48 días. Como ahora tiene 6 gatos le alcanzará para $\frac{48}{6} = 8$ días.

Problema 5. (Comité) Encuentra la suma de los dos números capicúas más cercanos a 2019. Recuerda que un número capicúa es aquel que sus dígitos (cifras) se leen de la misma manera de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 1221 y 212 son capicúas.

R:3993

Solución. Los dos capicúas anteriores a 2019 son 2002 y 1991; y los dos posteriores son 2112 y 2222. Como $2019-1991 = 28$ y $2112 - 2019 = 93$, se tiene que 2002 y 1991 son los dos más cercanos y la suma de ellos es, $2002 + 1991 = 3993$.

Problema 6. (Comité) Un padre y su hijo cumplen años el mismo día. En tres cumpleaños diferentes, la razón entre sus edades fueron $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{2}{1}$. ¿Cuál es la diferencia de edades entre el padre y su hijo?

R:28

Solución. Sean p y h las edades del padre y el hijo respectivamente, entonces $x = p - h$ es la diferencia que se desea encontrar. Se tiene que $\frac{p}{h} = \frac{h+x}{h} = 7/3, 13/6, 2$ en tres momentos diferentes, entonces para distintas edades del hijo se tiene: $\frac{x}{h_1} = \frac{4}{3}$, es decir, $3x = 4h_1$; $\frac{x}{h_2} = \frac{7}{6}$, es decir, $6x = 7h_2$; y $x = h_3$. De esto, se tiene que x es múltiplo común de 4 y 7. Es decir $x \in \{28, 56, 84, \dots\}$.
Para el caso $x \geq 56$, el padre tendría el doble de la edad del hijo en el tercer momento, por lo que tendría 112 años o más, lo cual es imposible. Por lo tanto, la única diferencia razonable es de 28 años.

Problema 7. (Aguascalientes) Eugenio tiene 4 borregos y una báscula que solo le permite pesar borregos en parejas (esto es, de dos en dos). ¿Cuál es la mínima cantidad de veces que Eugenio debe usar la báscula para conocer el peso de cada uno de sus borregos?

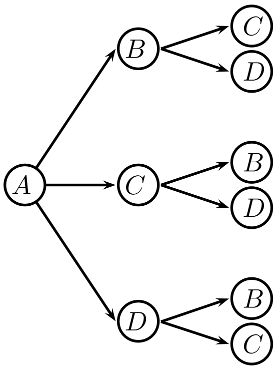
R:4

Solución. Veamos que usando la báscula cuatro veces es posible saber el peso de todos los borregos. Pesemos y llamemos a cada resultado como sigue: $x =$ Borrego 1 y 2, $y =$ Borrego 1 y 3, $z =$ Borrego 1 y 4, $w =$ Borrego 3 y 4. Veamos ahora que Borrego $1 = (y + z - w)/2$ y ya teniendo este dato, Borrego $2 = x-$Borrego 1, Borrego $3 = y-$Borrego 1 y Borrego $4 = z-$ Borrego 1. Ahora bien, es imposible hacerlo con tres pesadas o menos, pues tendríamos un sistema de ecuaciones lineales de 4 incógnitas y tres o menos ecuaciones, lo cuál no siempre tiene solución única.

Problema 8. (Oaxaca) Cuatro amigos intercambian sus libros de olimpiada. Cada amigo tiene un libro para regalar a otro amigo, y recibirá un libro de un amigo diferente al que él regaló, (es decir, dos amigos no se intercambian libros). ¿De cuántas maneras se pueden intercambiar los libros?

R:6

Solución. Por las condiciones establecidas en el intercambio, tiene que suceder que los cuatro amigos formen un solo ciclo al momento de darse los libros. Luego, las maneras de acomodar a los cuatro amigos en un ciclo son $\frac{4!}{4} = 3! = 6$.
Otra solución. Si A, B, C, D son los amigos, podemos hacer el siguiente árbol, donde una flecha representa dar el libro del amigo donde sale la flecha al amigo donde llega. Iniciamos con A que puede dar a cualquiera de los otros tres, y después cada uno de ellos solamente puede dar a los otros dos diferentes de A, el último de ellos deberá dar un libro a A.



Problema 9. **(Morelos)** Sea K una circunferencia con diámetro AB y centro O. Sea C un punto de K tal que $\angle ABC = 60°$. Sea D un punto del arco CA (el de menor longitud) tal que $\angle AOD = 30°$. Si BC y DO se intersecan en P, encuentra la razón del área del triángulo ADO entre el área del triángulo BPO.

R: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Solución. Sea M el punto medio del segmento PO. Como $\angle BPO = \angle OBC - \angle POB = 60° - 30° = 30°$, entonces el triángulo BPO es isósceles, por lo que BM es perpendicular a PO. Luego, el triángulo BOM es un triángulo rectángulo con ángulos $30 - 60 - 90$, por lo que $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, donde R es el radio de la circunferenca K. Luego $OP = \sqrt{3}R$. Se sabe que si dos triángulos comparten un ángulo, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón del producto de los lados adyacentes a los ángulos iguales. Esto es, $\frac{(AOD)}{(BOP)} = \frac{OA \cdot OD}{OP \cdot OB} = \frac{R \cdot R}{\sqrt{3}R \cdot R}$. Por lo tanto, la razón buscada es $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema 10. **(Comité)** Considera todos los números que se obtienen de 74477447 al reordenar sus cifras, ¿cuántos de estos números son cuadrados perfectos?
Recuerda que un número es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero, por ejemplo $36 = 6^2, 49 = 7^2$.

R: 0

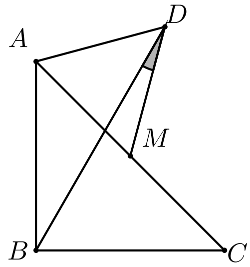
Solución. No hay ningún cuadrado perfecto que se pueda obtener de esta manera. El número 74477447, y cualquier otro número que resulte de reordenar sus cifras cumple que la suma de sus cifras que es $4 \times 4 + 4 \times 7 = 16 + 28 = 44$, luego el número y los que resulten de reordenar las cifras son congruentes a 2 módulo 3. Pero un cuadrado perfecto es congruente, módulo 3, solamente al número 0 o al número 1.

Problema 11. **(Comité)** En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el 60% de los chicos están bailando y el 80% de las chicas están bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?

R: 24

Solución. Por cada 4 chicas que bailan hay una chica que no baila; y por cada 3 chicos que bailan hay 2 que no bailan. Los números posibles de parejas que bailan son múltiplos de 12; para el primer múltiplo de 12, tendremos 12 chicas que bailan y 3 que no bailan y 12 chicos que bailan y 8 que no bailan. En este caso tendremos 12 chicas que bailan, 12 chicos que bailan y 11 personas que no bailan, la suma de estos es $12 + 12 + 11 = 35$, luego las personas que bailan son 24.
Otra solución. Sean a el número de chicos que están en la fiesta y b el número de chicas que están en la fiesta. Tenemos que $a + b = 35$, además como el 60% de los chicos están bailando con el 80% de las chicas, tenemos que $\frac{3}{5}a = \frac{4}{5}b$, por lo que $b = \frac{3}{4}a$. Luego $a + \frac{3}{4}a = 35$, por lo que $a = 20$ y entonces $b = 15$. Por tanto, hay $\frac{3}{5}20 + \frac{4}{5}15 = 24$ personas bailando.

Problema 12. **(Coahuila)** Sean ABC un triángulo con $AB = BC$, $\angle ABC = 90°$ y M el punto medio de AC. Se construye el triángulo equilátero ADM tal que D y B están en lados opuestos con respecto a AC. ¿Cuánto vale, en grados, el ángulo $\angle BDM$?



R:15°

Solución. Como ADM es equilátero entonces $AM = DM$. Como M es punto medio de AC, y $AM = DM$ entonces $DM = CM$, por lo que el triángulo DMC es isósceles y $\angle DCM = 30°$. Puesto que $\angle DCM = 30°$ y $\angle DAC = 60°$, $\angle ADC = 90°$, esto quiere decir que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y $\angle ADB = \angle ACB = 45°$. Por último, $\angle BDM = \angle ADM - \angle ADB = 60° - 45° = 15°$.

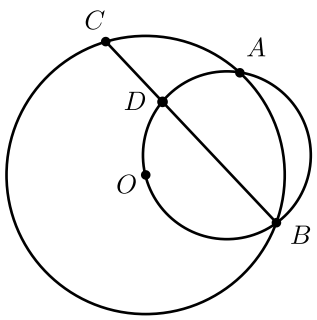
Otra solución. Como ADM es triángulo equilátero, $AM = MD = MC$, luego A, D y C están en la circunferencia de centro M y radio MA. Como ABC es un triángulo rectángulo y M es el punto medio de AC, entonces M es el centro de la circunferencia por A, B y C. Luego $ABCD$ es cíclico y se concluye como antes.

PARTE B

Problema 13. (Comité) En una bolsa hay 9 canicas, de las cuales al menos una de ellas es verde. Además cuando sacas cualesquiera 4 canicas hay al menos 2 que son del mismo color; y cuando sacas cualesquiera 5 de ellas hay a lo más 3 del mismo color. ¿Cuántas canicas verdes hay en la bolsa?

Solución. Hay al menos una canica verde. Por la condición de cuando se sacan 5 hay a lo más 3 del mismo color, no pueden haber más de 3 del mismo color, luego hay otros dos colores de canicas digamos blanco y rojo. No puede haber un cuarto color, ya que si se sacan 4 hay dos del mismo color. Luego hay tres colores y a lo más hay 3 de un color, pero como son 9 canicas, hay 3 de cada color, en particular hay 3 verdes.

Problema 14. (Sinaloa) Sean C_1 una circunferencia con centro en O y C_2 una circunferencia que pase por O y corte a C_1 en A y B. Sea C un punto en C_1 (O y C del mismo lado respecto de la recta AB) y D la intersección de BC con C_2. Muestre que el triángulo ADC es isósceles.



Solución. Como $\angle AOB$ es ángulo central del ángulo inscrito $\angle ACB$, sí $\angle ACB = \theta$, entonces $\angle AOB = 2\theta = \angle ADB$. Por otra parte, por ser ángulo externo del triángulo ACD, tenemos que $\angle ADB = \angle ACD + \angle DAC$, luego

$$\angle DAC = \angle ADB - \angle ACD = 2\theta - \theta = \theta.$$

Así $\angle ACD = \angle DAC = \theta$ por lo que ADC es isósceles.

Problema 15. (Comité) Ana escoge 4 números de entre $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Si Ana le dijera a Beto cuál es el producto de los 4 números que escogió, esta información no sería suficiente para que Beto pueda saber la paridad de la suma de los cuatro números escogidos por Ana. ¿Cuál es el producto de los cuatro números que eligió Ana?

Solución. Primero nota que conocer el producto de los cuatro números es equivalente a conocer el producto de los otros dos números. De los 15 productos que hay entre dos de los seis números solamente hay dos números el 6 y el 12 que se logran con dos diferentes parejas de números, $1 \times 6 = 2 \times 3 = 6$ y $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$. En el primer caso la suma de los números elegidos (que son $2, 3, 4, 5$ o $1, 4, 5, 6$) es siempre par. En el segundo caso, la suma de los números elegidos puede ser impar o par (ya que $1 + 3 + 4 + 5 = 13$ o $1 + 2 + 5 + 6 = 14$), que es el caso en que Beto no sabe la paridad. Así que que el producto de los cuatro números elegidos por Ana es: $1 \times 3 \times 4 \times 5$ o bien $1 \times 2 \times 5 \times 6$ pero estos dos productos son iguales a 60. Luego el producto de los cuatro números que eligió Ana es 60.

Equipos

Problema 1. (Comité) Un entero positivo de cuatro dígitos es *bidigital* si su expresión decimal usa solamente dos dígitos y cada uno de ellos es usado dos veces. Por ejemplo, 2020 es bidigital, mientras que 2222 y 2111 no lo son. ¿Cuántos números bidigitales hay?

R:243

Solución. El primer dígito del número debe ser diferente de cero, luego tal dígito se puede elegir de 9 maneras, ya elegido éste hay 3 lugares donde se puede colocar al otro dígito que sea igual al elegido. Los otros dos dígitos que serán iguales entre si, se pueden elegir de 9 maneras, basta que sea un dígito diferente al primer dígito elegido. Luego hay $9 \times 3 \times 9 = 243$ números bi-digitales.
Otra solución. Si el dígito 0 no se usa, hay $\binom{9}{2}$ de elegir los dos valores de los dígitos que usa el número y hay $\binom{4}{2}$ maneras de acomodar estos dígitos en el número. Luego hay $\binom{9}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{72}{2} \times \frac{12}{2} = 216$ números bi-digitales que no usan al cero. Si usan al 0, el primer dígito del número debe ser diferente de cero y hay 9 maneras de elegirlo y hay 3 lugares donde se puede colocar al segundo dígito que sea igual al primero; los otros dos dígitos están obligados a ser 0, luego en este caso hay 27 números bi-digitales. Y en total hay $216 + 27 = 243$ de tales números.

Problema 2. (Guanajuato) Encuentra los enteros positivos z, para los cuales $\dfrac{5z+64}{z+2}$ es una potencia de dos.

Solución. Supongamos que la fracción es un entero, el númerador debe ser par, por lo que $z = 2k$ para algún k natural. Si la expresión

$$\frac{10k+64}{2k+2} = \frac{5k+32}{k+1}$$

es una potencia de dos, de nuevo $k = 2m$ par algún m natural. Entonces será suficiente encontrar los m para los cuales

$$\frac{10m+32}{2m+1} = 5 + \frac{27}{2m+1}$$

es una potencia de dos. Primero veremos para cuales es entero, debemos tener que $2m+1$ divida a 27, luego $m = 0, 1, 4, 13$. Como 5+3 y 5+27 son potencias de 2 las respuesta son $m = 4, 0$, por lo que $z = 0, 16$, pero solamente $z = 16$ es positivo.

Problema 3. (Coahuila) Un número es *chido* si la suma de sus dígitos entre el producto de sus dígitos, sin contar el 0, es $2/3$. Ejemplo, 2019 es chido porque la suma de sus dígitos es $2 + 1 + 9 = 12$ y el producto es $2 \times 1 \times 9 = 18$ y $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. Encuentra el número chido más cercano a 2019 (que sea distinto de 2019).

R:2006

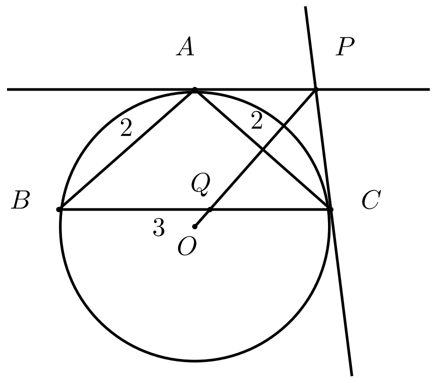
Solución. Si queremos que la suma entre el producto de sus dígitos sea $\frac{2}{3}$, entonces el producto de sus dígitos debe ser $3k$ y la suma $2k$, por lo que entre sus dígitos debe estar al menos un múltiplo de 3 diferente de 0, es decir un 3 un 6 o un 9 y la suma de sus dígitos debe ser par, luego los números cercanos a 2019 que pueden cumplir son 2006, 2013 y después de 2019 pueden ser 2026, 2033, ... Entonces antes de 2019 el más cercano que es chido es el 2006 ($\frac{8}{12}$) y después de 2019 los números 2026 y 2033 no son números chidos. Así que el número chido más cercano es 2006.

Problema 4. (Comité) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar números de entre $0, 1, 2$, en cada uno de los cuadritos de un tablero de 5×5, de manera que cada subtablero de 2×2 cumpla que la suma de los cuatro números de sus cuadritos sea un múltiplo de 3?

Solución. Un tablero de 2×2 donde la suma de sus números es múltiplo de 3 queda determinado por tres números del tablero. En efecto si a, b, c son números de entre $\{0,1,2\}$ entonces $a + b + c$ es uno de los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, y cada uno de ellos se puede completar (de manera única) con $0, 2, 1, 0, 2, 1, 0$, respectivamente para que la suma de los cuatro sea múltiplo de 3.

Luego el tablero de 5×5 quedará determinado por los números que se coloquen en la primera columna y en el primer renglón. Cada uno de estos 9 cuadritos puede ser ocupado por cualquiera de los tres números $0,1,2$, por lo que hay 3^9 maneras de llenar el tablero.

Problema 5. (Guanajuato) Sea ABC un triángulo con $AB = AC = 2\,cm$ y $BC = 3\,cm$. Considera la circunferencia que pasa por los vértices A, B, C y digamos que su centro es O. Se trazan las tangentes a dicha circunferencia que pasan por A y por C, estas tangentes se cortan en P. El segmento PO corta a BC en Q. Calcula, en cm, la longitud de CQ.



R: $\frac{4}{3}$

Solución. Tenemos que $PA = PC$ por ser tangentes, además $OA = OC$ por ser radios. Entonces PO es mediatriz de AC de esta manera $AQ = QC$. Entonces $\angle QAC = \angle ACB = \angle ABC$. Por lo que CA es tangente a la circunferencia que pasa por los vértices de ΔABQ. Luego los triángulos isósceles ABC y QCA son semejantes, por lo que $\frac{CQ}{AC} = \frac{AC}{CB}$, así $CQ = \frac{AC^2}{CB} = \frac{4}{3}$.

Problema 6. (Guanajuato) ¿Cuál es el menor entero positivo que no es divisor común de alguna pareja de enteros distintos de la lista $2, 4, 6, \ldots, 200$?

Solución. La respuesta es 51. Ya que si $k \leq 50$ y k es par, los números $k, 2k$ pertenecen a la lista y tienen como divisor común a k. Si $k \leq 50$ y k es impar, los números $2k, 4k$ pertenecen a la lista y tienen como divisor común a k. Pero, no hay dos números en la lista múltiplos de 51 puesto que $51 \cdot 4 > 200$.

Problema 7. (Puebla) El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él; por ejemplo, el segundo término es $9 + 7^2 = 58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

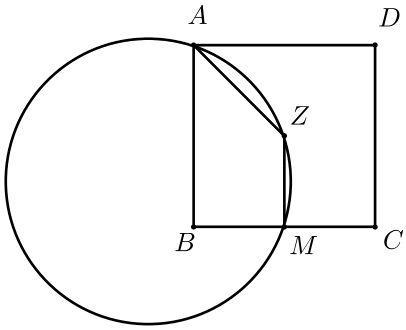
R: 9

Solución. Los términos de la sucesión son:

$$97, 58, 69, 87, 57, 54, 21, 3, 9, 81, 9, 81, \ldots$$

A partir del noveno término se repiten de dos en dos el 9 y el 81, luego como 2019 es impar, el término 2019 es 9.

Problema 8. (Jalisco) Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide $2\,cm$, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.



Solución. Sea X la intersección del lado BC con la circunferencia por A, Z y M, luego A, Z, M y X son concíclicos. Como Z es el centro del cuadrado y M es el punto medio de BC, entonces $\angle ZMX = 90°$. Luego, ZX es un diámetro de la circunferencia, por lo que $ZX = 2R$, donde R es el radio buscado.

Es fácil ver que $ZM = 1$ y que $\angle AZM = 135°$, por lo que $\angle MXA = 45°$. Además, $\angle ABX$ es recto, por lo que el triángulo ABX es rectángulo isósceles con $BX = AB = 2$. Entonces $MX = MB + BX = 3$. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ZXM, se tiene que $ZX^2 = ZM^2 + MX^2$. Luego, $(2R)^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, por lo que $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.