Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Examen Individual

NIVEL II

Instrucciones: El examen consta de dos partes. La parte A consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada uno. En estos problemas solo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente a cada problema. La parte B consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno. En estos problemas es posible acumular puntos parciales. La duración del examen es de **120 minutos.**

Parte A

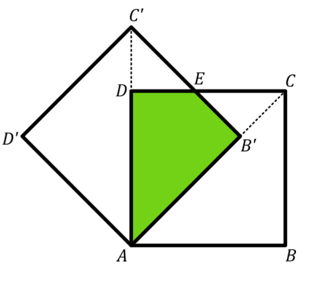
Problema 1 *(JALISCO) ¿Cuántos números primos dividen a* $73^2 - 31^2 - 91$*?* R: 3

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned} 73^2 - 31^2 - 91 &= (73+31)(73-31) - 91 = (2^3 \cdot 13)(2 \cdot 3 \cdot 7) - 7 \cdot 13 \\ &= 7 \cdot 13(2^4 \cdot 3 - 1) = 7 \cdot 13 \cdot 47. \end{aligned}$$

Por tanto, son 3 primos los que dividen a $73^2 - 31^2 - 91$.

Problema 2 *(COMITÉ) La siguiente figura se formó con dos cuadrados de lado 1 cm, el* $ABCD$ *y el* $AB'C'D'$*, de manera que* AB' *está sobre la diagonal* AC*. Sea* E *el punto de intersección de* $B'C'$ *con* CD*.*



Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel $\boxed{2}$

Encuentra el área, en cm^2 del cuadrilátero $AB'ED$. R: $\sqrt{2}-1$

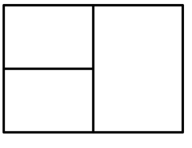
Solución: Notemos que $AB'ED$ es un cuadrilátero con $\angle B' = \angle D = 90°$, además $AB' = AD = 1$ y $DE = EB' = \sqrt{2}-1$. Luego,

$$\acute{A}rea(AB'ED) = \acute{A}rea(ADE) + \acute{A}rea(AB'E) = 2\acute{A}rea(AB'E) = 2\frac{AB' \cdot EB'}{2} = \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Problema 3 *(COMITÉ) En un baile de la escuela, cada alumno bailó con 3 alumnas y cada alumna bailó con 6 alumnos. Si al baile asistieron 90 personas entre alumnas y alumnos, ¿cuántos alumnos fueron al baile?* R: 60

Solución: Si hay A alumnos, entonces hubo $3A$ parejas que se formaron para bailar, y si B es el número de alumnas, se formaron $6B$ parejas de baile. Como $3A = 6B$, se tiene que $A = 2B$ y como $A + B = 90$, se tiene que $A = 60$ y $B = 30$.

Problema 4 *(CIUDAD DE MÉXICO) Un rectángulo se divide en tres rectángulos más pequeños como se muestra en la figura. Cada uno de los rectángulos más pequeño cumple que sus lados están en la misma proporción que los lados del rectángulo grande. En cada uno de los cuatro rectángulos, ¿cuál es la razón de la longitud del lado más grande entre la longitud del lado más pequeño?* R: $\sqrt{2}$



Solución: Supongamos que la longitud de los lados mayores de los rectángulos más pequeños es igual a y y la longitud de sus lados menores es x. Mientras que la longitud del lado menor del rectágulo mediano es igual a a y su lado mayor vale $2x$. Como los lados los lados de los rectángulos pequeños y grande, están en la misma proporción tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{y}{x} = \frac{a+y}{2x},$$

por lo tanto $\frac{2y}{2x} = \frac{a+y}{2x}$, de donde se concluye que $a = y$. Finalmente, de que el rectángulo pequeño y el rectángulo mediano tienen la misma proporción se obtiene

$$\frac{y}{x} = \frac{2x}{y} = \frac{2}{y/x}$$

por lo que $(y/x)^2 = 2$, y $y/x = \sqrt{2}$.

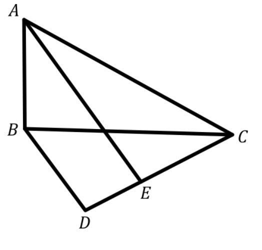
Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Problema 5 *(COAHUILA) Isaac y Alfredo juegan a lanzar dados de la siguiente manera. Isaac lanza un dado y apunta el número que salió en su libreta, luego vuelve a lanzar el dado y apunta el número que le salió a la derecha del número que ya había escrito, formando así un número de 2 dígitos. Luego, Alfredo hace lo mismo que hizo Isaac. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Alfredo sea mayor que el número de Isaac?* R: 35/72

Solución: Como un dado tiene 6 números, en total se pueden formar $6 \times 6 = 6^2$ números de dos cifras. Por tanto, la totalidad de casos (tomando en cuenta tanto los tiros de Isaac como de Alfredo) es $6^2 \times 6^2 = 6^4$. Por otro lado, notemos que en 6^2 casos Isaac y Alfredo obtienen los mismos resultados. Por tanto, en $6^4 - 6^2$ casos los resultados son distintos, y de ellos, la mitad corresponden al caso en que el número de Alfredo es mayor. Por tanto la probabilidad buscada es igual a

$$\frac{(6^4 - 6^2)/2}{6^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} = \frac{35}{72}.$$

Problema 6 *(CIUDAD DE MÉXICO) Sean ABC un triángulo rectángulo con $\angle ABC = 90°$, D un punto que cumple que BDC y ABC son triángulos semejantes, además A y D están en lados opuestos de BC. El punto E sobre CD cumple que los ángulos $\angle CAE$ y $\angle EAB$ son iguales. Si AE es paralelo a BD, ¿cuánto mide (en grados) el ángulo $\angle CAB$?* R: 60°

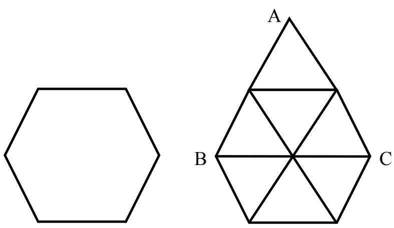


Solución: Como AE es paralelo a BD, el triángulo AEC es un triángulo rectángulo. Si F es la intersección de AE con BC, se tiene que los triángulos rectángulos ABF y CEF son semejantes por tener ángulos en F congruentes por ser opuestos por el vértice. Luego $\alpha = \angle BAE = \angle BAF = \angle FCE = \angle BCE$ y como $\triangle BDC \sim \triangle ABC$, entonces $\alpha = \angle BCE = \angle BCA$. De lo anterior tenemos que $2\alpha = \angle BAC$ y $\alpha = \angle BCA$, por lo tanto $\alpha = 30°$ y $\angle CAB = 60°$.

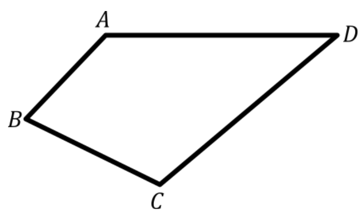
Problema 7 *(TABASCO) Si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro y el área del hexágono es de 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo?* R: 80

Solución: Consideremos la siguiente figura, y notemos que el triángulo ABC tiene el mismo perímetro que el hexágono. Más aún, el área del triángulo es $\frac{4}{6}$ del área del hexágono. Por tanto, Área $(ABC) = \dfrac{4}{6}120 = 80$ cm^2

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2



Problema 8 *(COMITÉ) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 13$ cm y $AD = 12$ cm. Si $\angle ABC$ es recto, calcula el área, en cm^2, de $ABCD$.* R: 36



Solución Por el Teorema de Pitágoras $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$. Por otro lado, notemos que $AD^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 = DC^2$. Entonces, por el recíproco del Teorema de Pitágoras tenemos que ADC es un triángulo rectángulo y $\angle DAC$ es recto. Por tanto $[ABCD] = [ABC] + [ADC] = 3 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{12}{2} = 36$ cm^2.

Problema 9 *(COMITÉ) En una escuela hay 8 alumnos que desean formar equipos de 3. ¿Cuántos equipos se pueden formar, si es permitido que dos equipos tengan a lo más un alumno en común?* R: 8

Solución: Si $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ son los alumnos, se pueden formar 8 equipos así: $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 8)$, $(3, 4, 8)$, $(3, 5, 7)$, $(6, 7, 8)$.
Si $A_1, \ldots, A_n$ son los equipos, entonces $|A_j| = 3$ con $1 \leq j \leq 8$, y $|A_i \cap A_j| \leq 1$ si $i \neq j$. Si existe a que esté en cuatro distintas A_i y como solo hay un alumno común en dos equipos, los otros 8 alumnos que se necesitan para los 4 equipos deben ser diferentes, por lo que deberá haber al menos $1 + 2 \cdot 4 = 9$ alumnos, lo cual no es posible. Por lo que un alumno pertenecerá a lo más a 3 equipos. Luego con los 8 alumnos podemos formar a lo más $\frac{8 \cdot 3}{3}$ equipos, es decir, el número de equipos n debe cumplir que $n \leq \frac{8 \cdot 3}{3} = 8$.

Problema 10 *(COMITÉ) En una competencia internacional de matemáticas, el 28% de los concursantes son de Asia, el 10% de Oceanía. Los concursantes de África junto con los de Europa son el 40% del total, además Asia tiene 66 alumnos más que los alumnos de África y entre alumnos de Europa y de Oceanía hay 187 alumnos. ¿Cuántos concursantes europeos participaron?* R: 132

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Solución: Sea T el total de concursantes. De Asia hay $A = \frac{28}{100}T$, de Oceanía $O = \frac{10}{100}T$ y entre africanos y europeos hay $Af + E = \frac{40}{100}T$. También se tiene que $A = Af + 66$ y $E + O = 187$, por lo que

$$\frac{40}{100}T = Af + E = (A - 66) + (187 - O) = \frac{28}{100}T - 66 + 187 - \frac{10}{100}T,$$

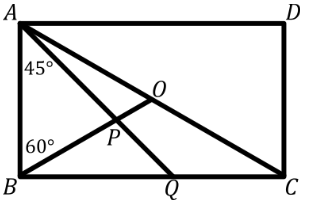
luego

$$\frac{40}{100}T = \frac{18}{100}T + 121,$$

por lo que $T = \frac{1}{22}(12100) = 550$. Así a la competencia asistieron 550 alumnos. De Oceanía asistieron 55 alumnos que corresponden al 10%, y como $E+O = 187$, se tienen que asistieron de Europa $187 - 55 = 132$ competidores.

Problema 11 *(COMITÉ) Sea $ABCD$ un rectángulo donde su diagonal AC y Q un punto sobre BC tal que $\angle BAQ = \angle QAD$ y $\angle QAD = 15°$. Encuentra la medida en grados del ángulo $\angle BOQ$, donde O es el punto medio de AC.* R: 75°

Solución: Denotemos por P la intersección de AQ y BO. Como $\angle BAQ = 45°$ y $\angle QAC = 15°$ se tiene que $\angle BAO = 60°$ y como O es punto de intersección de las diagonales, $\angle OBC = \angle BCO = \angle OAD = 30°$, luego $\angle ABO = 60°$, por lo que el triángulo ABO es equilátero. Luego $\angle APB = 180° - 60° - 45° = 75°$.



Como ABQ es un triángulo rectángulo isósceles con $AB = BQ$ y como ABO es equilátero se tiene que $BO = AB = BQ$, luego OBQ es isósceles y como $\angle OBQ = 30°$ se tiene que $\angle BOQ = \angle BQO = 75°$.

Problema 12 *(COMITÉ) Encuentra el mayor número entero positivo n, tal que $n^2 + 2018n$ sea un cuadrado perfecto.* R: $1008^2/2$

Solución: Sea m tal que $n^2 + 2018n = (n + m)^2$. Desarrollando y simplificando obtenemos $n = \dfrac{m^2}{2018 - 2m}$. Notemos que se trata de una función creciente en m para $1 \leq m \leq 1008$. Además la expresión no está definida para $m = 1009$ y $n < 0$ si $m \geq 1010$. Así que el máximo se alcanza en $m = 1008$. Entonces $n = \frac{1008^2}{2}$.

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Parte B

Problema 13 *(COMITÉ) Muestra que el siguiente número*

$$\frac{4}{3}+\frac{6}{5}+\frac{8}{7}+\cdots+\frac{102}{101},$$

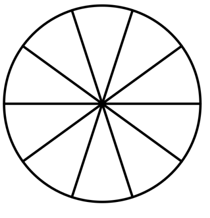
no es un número entero.

Solución: Notemos que

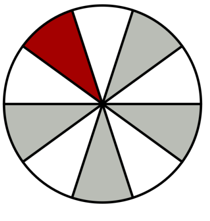
$$N=\frac{4}{3}+\frac{6}{5}+\cdots+\frac{102}{101}=(\frac{3}{3}+\frac{5}{5}+\cdots+\frac{101}{101})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{101})=50+B$$

Por tanto N es un número entero si y solo si el número $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{101}$ es entero. Sea $C=3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}\cdots{\cdot}99$, es claro que si $B\in\mathbb{Z}$, entonces $BC\in\mathbb{Z}$. Pero, $BC=\frac{C}{3}+\frac{C}{5}+\cdots+\frac{C}{99}+\frac{C}{101}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{C}{101}\in\mathbb{Z}$, pero esto último es falso ya que 101 es primo y en la factorización en primos de C el número 101 no está presente.

Problema 14 *(COMITÉ) En cada una de las 10 regiones en que se ha dividido el círculo de la figura se colocan 3 fichas. Un movimiento consiste en mover una ficha a una región vecina (es decir, a una región que comparte un radio). ¿Es posible que después de 2018 movimientos todas las fichas se encuentren en la misma región? Justifica tu respuesta.*



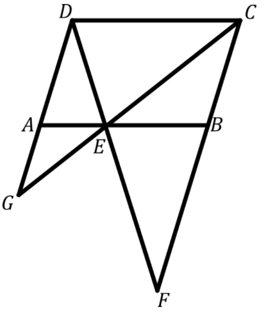
Solución: La respuesta es no. Supongamos que sí es posible hacerlo, y pintemos de negro la región correspondiente. Coloreamos las nueve regiones restantes alternadamente de gris y blanco como se muestra en la figura.



Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Observamos que si una ficha se encuentra en una región pintada de blanco, entonces requirirá de un número impar de movimientos para llegar a la región roja, en tanto que una ficha ubicada en una región negra ocupará un número par de movimientos. De ese modo, hay $3 \times 5 = 15$ fichas que requerirán cada una un número impar de movimientos para llegar a la región negra, haciendo un total impar de moviemientos. Por otro lado, las fichas de las casillas grises requieren un total par de movimientos. Así, el número de movimientos para llegar a la configuración deseada debe ser necesariamente impar, y por tanto no puede ser 2018.

Problema 15 *(COMITÉ) Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean E un punto sobre AB tal que los ángulos $\angle ADE$ y $\angle EDB$ son iguales, F la intersección de DE con BC y G la intersección de AD con CE. Muestra que, $BC^2 = BF \cdot AG$.*



Solución: Notemos que los triángulos ΔBCE y ΔAGE son semejantes, al igual que los triángulos ΔBEF y ΔAED, por lo que,

$$\frac{BC}{AG} = \frac{BE}{AE} \text{ y } \frac{BE}{AE} = \frac{BF}{AD}.$$

Luego $BC \cdot AD = BF \cdot AG$, y como $AD = BC$, se tiene que $BC^2 = BF \cdot AG$.

II Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica

Mérida, Yucatán, junio 9-12, 2018.

Prueba por Equipos

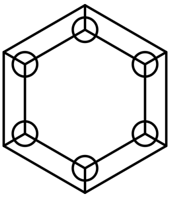
Nivel II

Estado: ______________________________
Integrantes: ______________________________
____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales. Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirá de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

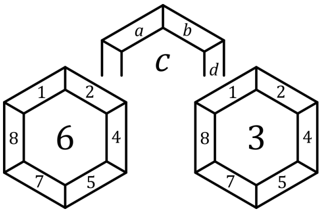
Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Problema 1 *(SINALOA) Se acomodan 7 de los números del 1 al 8 en las caras de la siguiente figura, de forma que para cada tres caras que se toquen en un mismo círculo la suma de los números en tales caras sea un múltiplo de 3. ¿Qué números se pueden omitir en acomodos con esta condición?.*



Solución: 3 y 6. Si una cara no central tiene un número a múltiplo de 3, entonces si d está en una cara a dos caras de distancia de a (sin pasar por el centro), estos tienen dos vecinos en común, (como se muestra en la figura) si estas tienen los números b y c, entonces

$$\begin{aligned} &a+b+c \text{ es múltiplo de } 3\\ &b+c+d \text{ es múltiplo de } 3\\ &\Rightarrow a-d \text{ es múltiplo de } 3. \end{aligned}$$



Y como a es múltiplo de 3, d también lo es. Entonces no puede haber un múltiplo de 3 fuera del centro ya que habría al menos 3 caras con múltiplos de 3 y del 1 al 8 hay 2 múltiplos de 3. Concluimos que se puede tener a lo más un múltiplo de 3 y como se omite solo un número este debe ser 3 o 6. Para ambos casos se encuentra un acomodo que funciona.

R: 3, 6

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Problema 2 *(COMITÉ) Encuentra el entero positivo más pequeño de seis dígitos que cumpla que la suma de sus seis dígitos sea igual al producto de sus dígitos.*

Solución: Ningún dígito debe ser cero y no puede tener 5 o 6 dígitos iguales a 1, (ya que no es posible que se cumpla: $5 + a = a$ o $6 = 1$).
Si tiene 4 dígitos iguales a 1, los otros dos dígitos a y b cumplen que $a + b + 4 = ab$, que es equivalente a que $(a - 1)(b - 1) = 5$, luego $a = 6$, $b = 2$ o bien $a = 2$, $b = 6$, entonces el número que se busca es 111162 o 111126, el segundo es el más pequeño.

Criterio.

2 puntos Notar que ninguno de los dgitos puede ser cero

2 puntos $n =$ "111111" que es el menor, no cumple.

4 puntos Para $n =$ "11111a", no hay solucin.

8 puntos Si $n =$ "1111ab" entonces $ab = 4 + a + b$ y $a, b = 2, 6$

4 puntos Concluir que $n = 111126$.

Si solo da el número sin justiticar que es el menor (2pt)

R: 111126

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Problema 3 *(COMITÉ) Encuentra todas las parejas de números reales (x, y) que cumplen las siguientes dos igualdades*

$$x^3 + y^3 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Solución: Notemos que $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (1, 0)$ son soluciones. Por la segunda igualdad x e y tienen valor absoluto menor o igual que 1. Además, no existe solución con $x = y$, tampoco con $x = -1$ y tampoco con $y = -1$. Supongamos que $x < y$ y analicemos los siguientes casos:

1. Supongamos $x > 0$, entonces tenemos que $0 < x < y \leq 1$. Por tanto $x^3 < x^2$ y $y^3 < y^2$ y así
$$1 = x^3 + y^3 < x^2 + y^2 = 1,$$
lo cual es absurdo.
2. De manera similar, si $x < 0$ entonces $y^3 = 1 - x^3 > 1$, luego $y > 1$, contradiciendo la segunda ecuación.

Por tanto la única alternativa es $x = 0$ y entonces $y = 1$. Concluimos que las únicas soluciones son $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (1, 0)$.

R: $x = 0, y = 1$ y $x = 1, y = 0$

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Problema 4 *(MICHOACÁN) Encuentra todas las parejas de enteros positivos* (a, r) *tales que el número* $N = a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 + (a+3r)^2 + (a+4r)^2$ *tenga todas sus cifras iguales.*

Solución: Sea $c = a + 2r$, entoncesl

$$N = (c-2r)^2 + (c-r)^2 + c^2 + (c+r)^2 + (c+2r)^2 = 5c^2 + 10r^2$$

tiene todas su cifras iguales. Como N es divisible entre 5 entonces acaba en 5 o 0. Luego todas las cifras del N deberán ser 0 o 5. El primer caso implica que $N = 0$ y en consecuencia $a = r = 0$, lo cual es absurdo. En el segundo caso tenemos que $\frac{N}{5} = c^2 + 2r^2$ tiene todas sus cifras iguales a 1. Por tanto, si $N/5$ tiene tres cifras o más, entonces $N/5 \equiv 111 \equiv 7 \mod 8$. Sin embargo, dado que los cuadrados son congruentes a 0,1 o 4 mod 8 entonces tenemos que $c^2 + 2k^2$ es conguente a 0,1,2,4 o 6 mod 8, lo cual es contradictorio. Por tanto tenemos que $N/5 = 1$ o $N/5 = 11$. El primer caso implica $k = 0$ por lo que $a = b = c = d = e = 1$, llegando nuevamente a un absurdo. Finalmente, al resolver $c^2 + 2k^2 = 11$ obtenemos $c = 3$ y $k = 1$. De este modo, la única solución es la progresión $1, 2, 3, 4, 5$.

Criterio.

5 pts. Demostrar que 5 divide a N.

10 pts. $N = 55\ldots5$ o $N = 00\ldots0$ y descartar $(0, 0)$.

5 pts. Encontrar la pareja $(1, 1)$.

20 pts. Demostrar que $(a, r) \neq (1, 1)$ no funciona.

R: $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

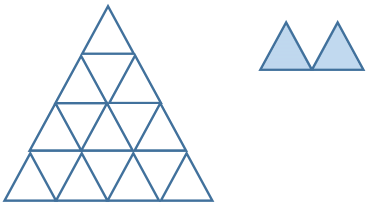
Problema 5 *(COMITÉ) Un triángulo ABC tiene sus vértices sobre una circunferencia con centro O, además se cumple la siguiente propiedad: si O, C' son simétricos con respecto a C se cumple que $\angle CC'A = \angle ABC$. Encuentra el valor (en grados) del ángulo $\angle ABC$.*

Solución: Sea $\beta = \angle ABC$. Consideremos a O' el centro del circuncírculo de ACC'. Por la medida del ángulo inscrito $\angle CO'A = 2\angle CC'A = 2\angle ABC = 2\beta$. Tenemos también por ser isósceles los triángulos $AO'C$ y AOC, que $\angle O'AC = \angle ACO' = 90° - \beta = \angle OAC = \angle OCA$, por lo que son congruentes los triángulos $AO'C$ y AOC, luego $O'C = O'A = OA = OC$. Como $\angle OCO' = 180° - 2\beta$, se tiene que $\angle O'CC' = 180° - \angle OCO' = 2\beta$ y $O'C = OC = CC'$ y como $O'C = O'C'$ (ya que O' es el centro del circuncírculo de ACC'), luego $CC'O'$ es un triángulo equilátero, de donde $\angle O'CC' = 2\beta = 60°$, por lo que $\beta = 30°$.

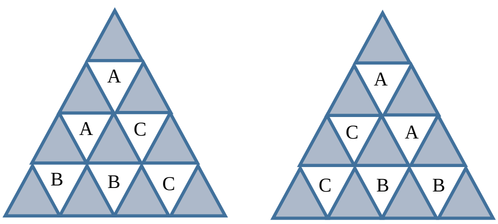
R: 30°

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

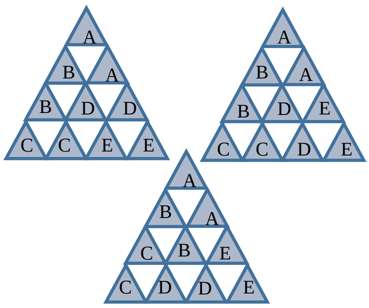
Problema 6 *(MICHOACÁN) Se quiere acomodar 8 piezas como las de las derecha (las puedes rotar de ser necesario) de menra que se cubra toda la figura de la izquierda. ¿Cuántos acomodos diferentes se pueden hacer?*



Solución: Si coloreamos la figura como tablero de ajedrez, notamos que una pieza siempre debe cubrir dos triangulitos negros, o bien dos triangulitos blancos. Contaremos las maneras de acomodar los triangulitos de cada color y bastará aplicar el principio multiplicativo. La región blanca se pude llenar con 3 piezas de 2 maneras distintas (ver figura).



La región negra se llena con 5 piezas de la siguiente manera: primero se coloca las pieza que va en el vértice superior del triángulo –para ello hay dos casos– y se observa que cada caso se completa de 3 maneras distintas (en la figura se ilustra uno de esos casos). Así hay $2 \times 3 = 6$ maneras de llenar la región negra. Por tanto, la respuesta es $2 \times 6 = 12$.



Criterio.

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

3 puntos Decir que caben 8 y hacer un acomodo como ejemplo.

10 puntos Decir que se puede colorear con dos colores 6 de un color y 10 de otro.

3 puntos Decir que cada pieza corresponde a un solo color.

8 puntos Decir de cuntas maneras se pueden acomodar tres piezas de un color.

8 puntos Decir cuntas maneras se pueden acomodar las cinco piezas del otro color.

8 puntos Obtener el resultado correcto por construccin.

R: 12

Nombre:	SOLUCIONES	Estado:		Nivel	2

Problema 7 *(TABASCO) Los números* ***creativos*** *son números de 4 cifras abcd tales que los números de dos cifras ab, cd son ambos pares. Además, la suma de sus dígitos es un número primo. Por ejemplo, 2018 es número creativo, ya que ab* $= 20$ *y cd* $= 18$ *son números pares de dos cifras y la suma* $2+0+1+8=11$ *es un número primo. ¿Cuántos números creativos menores o iguales al 2018 hay?*

Solución: Haremos una demostración por casos. Como $abcd < 2108$ entonces tenemos que $a = 1$ o $a = 2$. Cuando $a = 1$ entonces tenemos la ecuación

$$b + c + d = p - 1$$

Si $p = 2$, entonces la única solución es $b = d = 0$, $c = 1$, por lo que el único número creativo en este caso es 1010. Si p es un primo impar, dado que b y d son pares, por paridad concluimos que c también lo es. Además, como cd es un número de dos cifras tenemos que $c \neq 0$. Por tanto, podemos hacer el cambio de variables $b = 2B$, $c = 2(C+1)$, $d = 2D$ y transformar la ecuación anterior en

$$B + C + D = \frac{p-3}{2}$$

sujeta a las condiciones $0 \leq B \leq 4$, $0 \leq C \leq 3$, $0 \leq D \leq 4$. Por tanto tenemos que $\frac{p-3}{2} \leq 4+3+4 = 11$ y en consecuencia $p \leq 25$. La siguiente tabla ilustra los valores correspondientes a los primos p que cumplen la desigualdad.

p	3	5	7	11	13	17	19	23
$\frac{p-3}{2}$	0	1	2	4	5	7	8	10

En cada caso se puede resolver la ecuación usando el método de separadores y el principio de inclusión-exclusión. La siguiente tabla muestra todas las posibilidades:

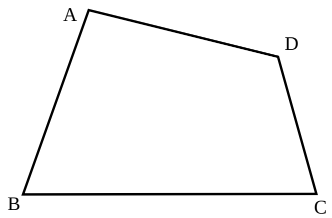
$\frac{p-3}{2}$	Soluciones	Total
0	$\binom{2}{2}$	1
1	$\binom{3}{2}$	3
2	$\binom{4}{2}$	6
4	$\binom{6}{2} - \binom{2}{2}$	14
5	$\binom{7}{2} - \left[\binom{3}{2} + 2\binom{2}{2}\right]$	16
7	$\binom{9}{2} - \left[\binom{5}{2} + 2\binom{4}{2}\right]$	14
8	$\binom{10}{2} - \left[\binom{6}{2} + 2\binom{5}{2}\right]$	10
10	$\binom{12}{2} - \left[\binom{8}{2} + 2\binom{7}{2}\right] + \left[2\binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right]$	3

Así que hay un total de 67 soluciones en este caso. Finalmente, consideremos el caso $a = 2$ tenemos que p debe ser impar y las únicas posibilidades son 2010, 2012, 2014 y 2018. Hemos probado así que hay $1 + 67 + 4 = 72$ números creativos.

R: 72

Nombre: SOLUCIONES Estado: Nivel 2

Problema 8 *(COMITÉ) Sea $ABCD$ un cuadrilátero, como se indica en la figura. Muestra que si los cuatro triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, tienen el mismo perímetro, entonces $ABCD$ es un rectángulo.*



Solución: Supongamos que $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ y $f = BD$. Si los perímetros de los triángulos son iguales, se tiene que

$$a + b + e = b + c + f = c + d + e = d + a + f$$

Luego

$$\begin{aligned} a + e &= c + f \\ b + f &= d + e \\ c + e &= a + f \\ b + e &= d + f \end{aligned}$$

de donde: $a - c = f - e = d - b = e - f$. Ahora como, $f - e = e - f$, se tiene que $e = f$. Luego $a = c$, $f = e$, $d = b$. Pero un cuadrilátero con lados opuestos iguales y con las diagonales iguales, tiene que ser un rectángulo.

Criterio.

10 pts. Plantear sus ecuaciones y su igualdad.

12 pts. Utilizar las ecuaciones para ver la igualdad entre los lados.

14 pts. Utilizar las ecuaciones para que las diagonales son iguales.

4 pts. Concluir: como las diagonales son iguales, es rectngulo