Soluciones Nivel 1

Individual

Problema 1. (Comité) Nàm escribió un número en su cuaderno al cual multiplicó por 3, al resultado le sumó 3, después dividió entre 3, por último restó 3. Si su resultado final fue 3, ¿qué número escribió Nàm en su cuaderno?

R:5

Solución. Si en el último paso restó 3, significa que el número antes de este paso era $3+3=6$. Como en el paso anterior dividió entre 3, entonces el número antes de este paso era $6 \times 3 = 18$. Como en el paso anterior sumó 3, significa que el número antes de este paso era $18 - 3 = 15$. Por último, como al principio multiplicó por 3, significa que el número que escribió Nàm era $\frac{15}{3} = 5$.

Problema 2. (Michoacán) En cada cuadrito de la siguiente tabla se quiere escribir un número de entre 1, 2, 3, 4 y 5, de tal manera que por un lado la suma de los números en cada renglón sea la misma, y por otro lado la suma de los números en cada columna sea la misma. Ya se escribieron algunos de los números. ¿Cuál es la suma de los 6 números de los cuadritos?

1		4
	2	

R:18

Solución. Como la primer columna tiene un 1, la máxima suma de columna es menor o igual que $1+5$ y como la última columna tiene un 4, la mínima suma por columna es $4+1=5$. Entonces, la suma por columna debe ser 5 ó 6. Los dos casos se muestran a continuación:

1	3	4
4	2	1

1	4	4
5	2	2

Como sólo el segundo arreglo cumple con la condición de renglones, la suma buscada es $3 \times 6 = 18$.

Problema 3. (Estado de México) Se va aplicar un examen en el auditorio de la escuela. El auditorio tiene 20 filas de asientos, la primera fila tiene 10 asientos y cada fila sucesiva tiene un asiento más que la fila anterior. Para hacer el examen los alumnos se deben sentar de manera que en cada fila de asientos entre cada dos alumnos deben quedar dos asientos vacíos. ¿Cuál es el máximo número de alumnos que pueden sentarse en el auditorio?

R:137

Solución. En las filas 1, 2 y 3 se pueden sentar a lo más 4 alumnos, en las filas 4, 5 y 6 se pueden sentar a lo más 5 alumnos, y así sucesivamente, la cantidad de alumnos aumenta en 1 cada tres filas. En total se pueden sentar a lo más $3(4) + 3(5) + \cdots + 3(9) + 2(10) = 137$ alumnos.

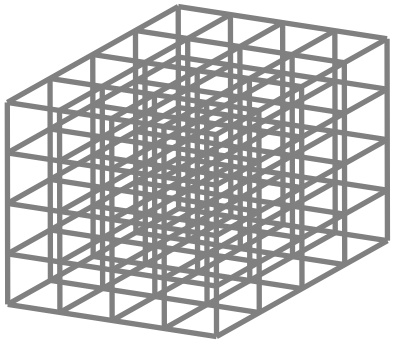
Problema 4. (Coahuila) Diana va a colorear los números enteros positivos con uno de los colores verde, blanco y rojo, siguiendo las siguientes indicaciones:
(i) La suma de dos números (que pueden ser iguales) pintados de verde, se pinta de rojo.
(ii) La suma de dos números (que pueden ser iguales) pintados de rojo, se pinta de verde.
(iii) La suma de dos números uno pintado de verde y otro pintado de rojo, se pinta de blanco.

Si inicia pintando al número 1 de rojo, ¿de qué color quedará pintado el número 2020 ?
Si concluyes que el color del 2020 es el verde, escribe como respuesta: 1, si concluyes que es el blanco, escribe como respuesta: 2 y si concluyes que se colorea de rojo, escribe como respuesta: 3.

R:3

Solución. Revisando los primeros casos se puede ver que el 2 se colorea de verde, el 3 de blanco, el 4 de rojo, el 5 de verde, el 6 de blanco y así sucesivamente. En los primeros casos los números rojos dejan residuo 1 al dividirse entre 3, los verdes dejan residuo 2 y los blancos dejan residuo 0. Este patrón va a seguir, ya que, si sumamos dos números congruentes a 1 módulo 3 nos da un número congruente a 2 módulo 3, y si sumamos dos números congruentes a 2 módulo 3 nos da un número congruente a 1 módulo 3. Por lo tanto, como 2020 deja residuo 1 al dividirse entre 3, podemos asegurar que se pinta de color rojo.

Problema 5. (Estado de México) Se quiere construir una alambrada en forma de cubo de dimensiones $4\,cm \times 4\,cm \times 4\,cm$ de manera que la alambrada quede dividida en cubitos de $1\,cm \times 1\,cm \times 1\,cm$ como se ve en la figura. ¿Cuántos centímetros de alambre se necesitan?



R:300

Solución. La alambrada se puede pensar como la unión de tiras de alambre de $4\,cm$ que se colocan en tres direcciones "ancho", "fondo" y "alto", en cada dirección se usan 25 tiras, luego se necesitan $3 \times 25 \times 4 = 300\,cm$ de alambre.

Problema 6. (Baja California) Un pintor realizó un mural con puros cuadrados. El primer día pintó un cuadrado de $1m \times 1m$, el segundo día se pintó uno de $1m \times 1m$ y otro de $2m \times 2m$, el tercer día cuadrados de $1m \times 1m$, $2m \times 2m$ y de $3m \times 3m$ y así sucesivamente. Después de haber pintado 250 metros cuadrados en total, el pintor se detuvo. ¿Qué cantidad de metros cuadrados pintó el último día el pintor?

R:54

Solución. En la siguiente tabla, se puede observar la cantidad de área que va pintando el pintor día a día hasta superar los 250 metros cuadrados en total.

Esto indica que el pintor se detuvo en el día 7, y ese día pintó $250 - 196 = 54$ metros cuadrados.

Problema 7. (Tabasco) Se tienen tres cajas de las cuales una contiene dos bolas, cada una marcada con el número 1; otra contiene dos bolas, cada una marcada con el número 2, y la tercera contiene una bola marcada con el 1 y una bola marcada con el 2. Los contenidos están indicados con las etiquetas 11, 22 y 12 que han sido equivocadamente pegadas en las cajas, de suerte que ninguna de las cajas lleva la etiqueta correcta. Para restituir a cada caja la etiqueta que le corresponde, se permite entreabrir una caja, solo el tiempo necesario para ver que número tiene una de las bolas. ¿Qué etiqueta tiene la caja que se debe destapar?

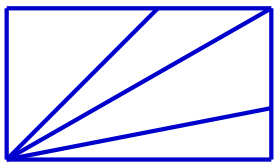
Día	No. cuadritos pintados	m^2 acumulados
1	1	1
2	5	6
3	14	20
4	30	50
5	55	105
6	91	196
7	140	336

R:12

Solución. Se destapa la caja 12. Esta caja es la única que viendo una bola podemos afirmar qué número tiene la otra. De entrada sabemos que las dos bolas tienen el número. Sin pérdida de generalidad, supongamos que nos encontramos con las dos bolas que tienen el 1, a esa caja le debe corresponder la etiqueta 11. Como sabemos que la caja con la etiqueta 22 no tiene las dos bolas con el número 2 y ahora tampoco las dos con el número 1, entonces a esa caja le debe corresponder la etiqueta 12 y a la que tenía la 11 le corresponde la 22.

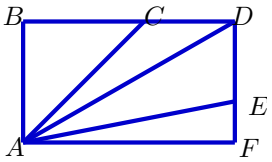
Problema 8. (Puebla) En la siguiente figura hay un rectángulo que se ha dividido en triángulos. ¿Cuántos ángulos agudos hay en la figura?

Nota: *Un ángulo agudo es uno cuya medida es menor a* $90°$.



R:13

Solución.



Sean A, B, D, F los vértices del rectángulo, C y E puntos en los lados BD y DF, respectivamente. Solamente hay ángulos agudos alrededor de los puntos A, C, D y E. En el punto A concurren 5 segmentos por lo que hay en principio $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ ángulos, todos ellos menores o iguales a $90°$, y solamente uno de ellos es recto, entonces en A hay 9 ángulos agudos. En los vértices C y E hay un ángulo agudo en cada uno de ellos y en el vértice D hay 2 ángulos agudos. Luego en total hay 13 ángulos agudos.

Problema 9. (Yucatán) Cada número de 3 cifras decimales se divide entre la suma de sus 3 cifras y da un resultado. Por ejemplo, el número 207 se divide entre $2 + 0 + 7 = 9$ dando como resultado $\frac{207}{9} = 23$. ¿Cuál es el mayor valor que se puede obtener como resultado, al considerar todos los números de tres cifras?

R:100

Solución. Notamos primero que el cociente entre dos números es más grande cuando el numerador es lo máximo posible y el denominador es lo mínimo posible. Si la suma de cifras es cualquier número entero entre 1 y 9, lo máximo que puede

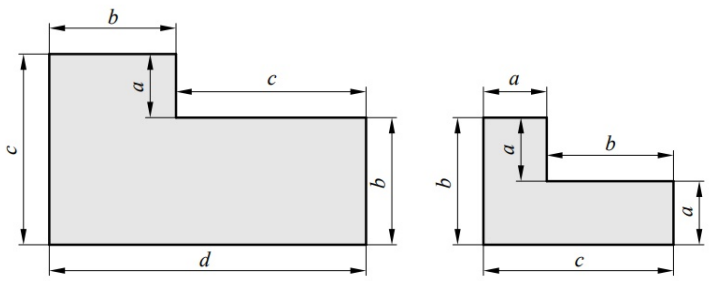
ser el cociente es 100 pues, por ejemplo si la suma fuera 7, el mayor numerador que puede tener suma de dígitos igual a 7 es 700 y entonces $\frac{700}{7} = 100$. Si la suma de los dígitos es 10 o más, como el numerador a lo más es 999, entonces el cociente es menor o igual a $\frac{999}{10} = 99.9$. La respuesta es 100.

Problema 10. (San Luis Potosí) Usando las siguientes fichas se pueden formar 325 números diferentes, algunos números usan solamente una ficha, otros dos fichas y otros tres, cuatro o cinco fichas. ¿Cuántos de estos números no son múltiplos de 9 ?

R:311

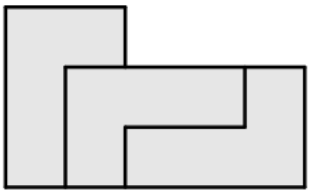
Solución. Encontremos la cantidad de números que **sí** son múltiplos de 9. Con una sola ficha no hay múltiplos de 9, tampoco usando 4 o 5 fichas se puede formar un múltiplo de 9. Con dos fichas solo se puede formar un múltiplo de 9, si se escogen las fichas 4 y 5 y en este caso hay dos números (el 45 y el 54). Con tres fichas hay dos ternas que sirven $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 3, 4\}$ y en cada caso hay 6 números que se pueden formar. Luego hay $2 + 6 + 6 = 14$ números de los que se forman que son múltiplos de 9, luego de los que no son múltiplos de 9 hay $325 - 14 = 311$.

Problema 11. (Chiapas) ¿Cuál es la razón del área de la figura de la izquierda entre el área de la figura de la derecha?



R:3

Solución. **1** Observe la siguiente figura. La razón de las áreas es 3



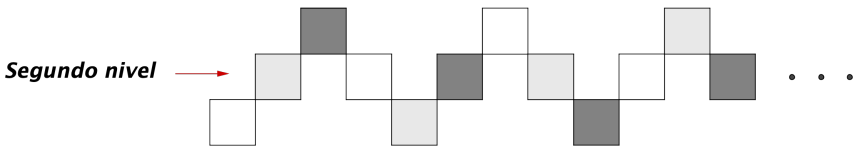
2 Algebraícamente se tiene que la razón de las áreas es

$$\frac{ab + db}{aa + ac} = \frac{b(a + d}{a(a + c)}$$

Observe que $b = 2a$, $c = b + a = 3a$ y $d = c + b = 3a + 2a = 5a$. Así

$$\begin{aligned}\frac{ab + db}{aa + ac} &= \frac{2a(a + 5a}{a(a + 3a)} \\ &= \frac{2(6a)}{4a} = 3\end{aligned}$$

Problema 12. (Sinaloa) Se acomodan cuadrados formando escalones como en la figura hasta tener 2020 cuadrados acomodados.



Estos cuadrados se colorean intercalando los colores blanco, gris y negro. ¿Cuántos cuadrados del segundo nivel de los escalones se colorean de color gris?

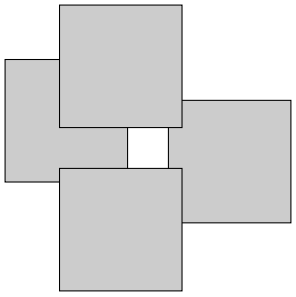
R:337

Solución. Los cuadros aparecen en la sucesión siguiente, en donde se han subrayado los cuadros del segundo nivel y se ha indicado por B el que el cuadro sea blanco, por G el que sea gris y por N el que sea negro:

$$B\ \underline{G}\ N\ \underline{B}\ G\ \underline{N} \quad B\ \underline{G}\ N\ \underline{B}\ G\ \underline{N} \cdots$$

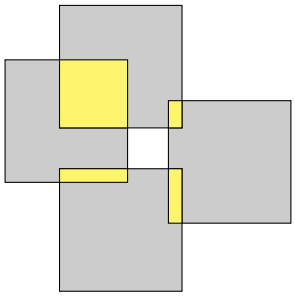
Notamos que la sucesión se repite cada 6 términos y que exactamente ahí aparece un gris en segundo nivel. Como $2020 = 6 \times 336 + 4$, la respuesta es 337.

Problema 13. (Michoacán) La siguiente figura se formó traslapando (encimando) cuadrados de área $81cm^2$ cada uno, y el cuadrado que se forma en el centro tiene área $9cm^2$. Si el cuadrado de arriba está exactamente arriba del cuadrado de abajo, es decir los lados verticales de los dos cuadrados están alineados, ¿cuánto vale el área sombreada?



R:288

Solución. En la siguiente figura se puede observar que si se juntan los cuatro pedazos amarillos, se forma un cuadrado de lado $(9 - 3) \times (9 - 3) = 6 \times 6$.



Es fácil concluir entonces que el área total sombreada es $4 \times 81 - 36 = 288$.

Problema 14. (Chiapas) Considera todos los enteros positivos de la forma

$$1,\ 12,\ 123,\ ...,1234567891011,\ ...$$

que resultan de escribir consecutivamente los primeros enteros.
De los números anteriores, ¿cuántos dígitos tiene el número más pequeño donde aparece la cadena de números 2022 ?

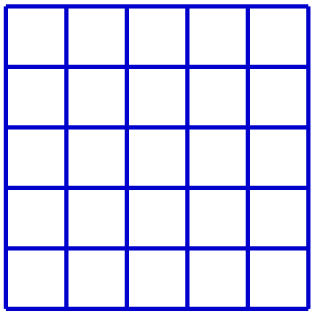
Nota. *Por ejemplo, el número más pequeño en el que aparece la cadena* 91 *es el décimo de los números ya que* 12345678**91**0.

R:501

Solución. El número 1 2 3 4... 202 203 donde se escriben los primeros 203 números enteros positivos es uno donde aparece la cadena de números 2022 ya que 1 2 3 . . . 202 203 y tenemos que el número de dígitos está dado por $9+(90)(2)+(100)(3)+4(3) = 501$. Éste es el más pequeño, note que la cadena 20 aparece antes de considerar el número que usa los primero 200 números, solamente cuando se consideran 20 o 120 números seguidos, así que no es posible que aparezca antes la cadena 2022.

Problema 15. (Campeche) Un gusano deberá recorrer todos los segmentos de la siguiente cuadrícula. Si recorre un segmento cada día, ¿cuál es el menor número de días que necesita el gusano para recorrer la cuadrícula?

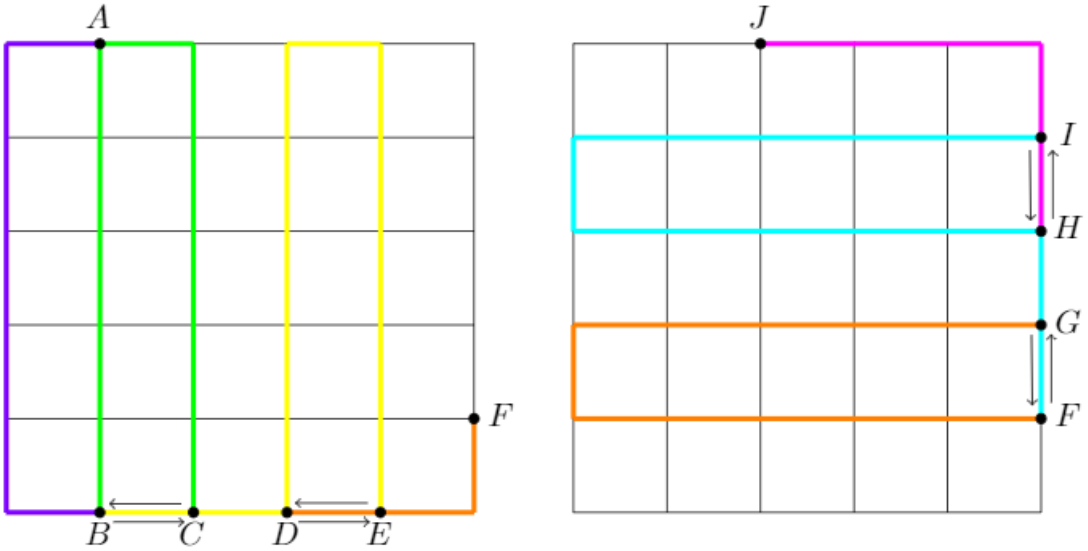
Nota. *El gusano puede recorrer 2 o más veces un segmento, y no da saltos.*



R:67

Solución. Se empieza mostrando un camino que prueba que 67 es posible. Para esto, el gusano empieza en el vértice A de la figura de la izquierda y sigue el camino morado hasta llegar al punto B. De ahí sigue el camino verde hasta llegar al punto C donde, por la línea amarilla, se regresa al punto B y, siguiendo el camino amarillo, sigue hasta llegar al punto E. De nuevo, siguiendo el camino naranja, el gusano regresa al punto D y avanza por el camino naranja hasta el punto F. Después, en la figura de la derecha, del punto F se va al vértice G por el camino naranja para que, usando el camino celeste,

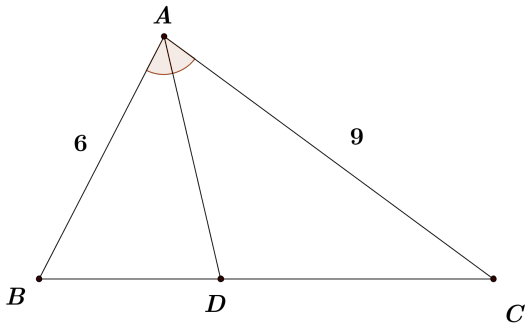
se regrese al punto F y siga ese camino celeste hasta llegar al punto I. Finalmente, siguiendo el camino rosa, el gusano regresa al punto H y, siguiendo ese mismo camino, termina su recorrido llegando al vértice J.



Ahora, se probará que se ocupa al menos esa cantidad de días. Primero obsérvese que hay exactamente 60 segmentos en la figura. Además, existen 16 vértices de la cuadrícula que tienen exactamente tres segmentos saliendo de él (los que están sobre los lados del cuadrado más grande que no son las esquinas), llamémoslos *especiales*. Siempre que el gusano llega a un vértice tiene que salir de él (a menos que ese sea el vértice final de su recorrido), por lo que si el gusano no empieza ni termina en un vértice especial en particular, va a repetir al menos un segmento que sale de él pues usará dos la primera vez que pase por él y, como tiene que pasar de nuevo por ahí para cubrir el tercer segmento, repetirá uno cuando salga. Esto no sucede con los vértices que no son especiales pues tienen una cantidad par de segmentos saliendo de ellos.
Así, por cada vértice especial que no es el inicio ni el fin del recorrido, se va a repetir un segmento. Como son 16 vértices especiales y a lo mucho dos pueden ser el inicio o el fin del recorrido, se van a repetir al menos 14 segmentos, pero estos se pueden contar doble (un segmento repetido para un vértice puede ser el mismo segmento repetido para otro vértice), por lo que al menos se deben repetir en total $\frac{14}{2} = 7$ segmentos, dando un total de al menos 67 días para recorrer todos los segmentos de la cuadrícula.

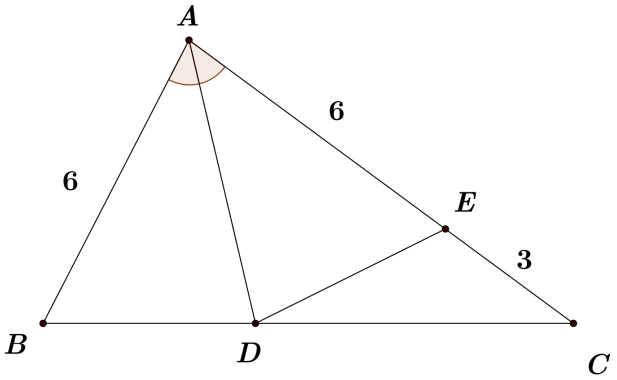
Equipos

Problema 1. (Sinaloa) Sean ABC un triángulo con $AB = 6$, $AC = 9$ y D un punto del segmento BC tal que AD es bisectriz del ángulo $\angle A$. Si el área del triángulo ABD es igual a 8, ¿cuál es el área del triángulo ABC?



R:20

Solución.



Sea E un punto del segmento AC tal que $AE = AB = 6$. Por el criterio LAL los triángulos ABD y ADE son congruentes, luego sus áreas son iguales. Por otro lado como los triángulos ADE y DCE tienen la misma altura sobre las bases AE y EC, respectivamente, se tiene que $\frac{(ADE)}{(DCE)} = \frac{6}{3} = 2$. Luego tenemos que $(ABD) = (ADE) = 2(DCE) = 6$, por lo que $(ABC) = (ABD) + (ADC) + (DCE) = 8 + 8 + 4 = 20$.

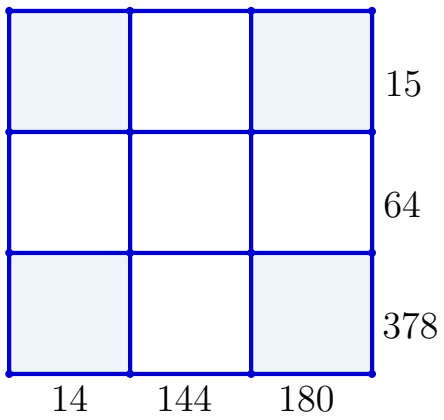
Problema 2. (Nuevo León) Ana y Eva juegan alternadamente a colocar fichas en las casillas de una cuadrícula de 9×9, con las tres reglas siguientes:
(1) en cada casilla vacía se coloca una sola ficha,
(2) en un turno pueden colocar 1, 2 o 3 fichas,
(3) perderá la que coloca la última ficha.

Si inicia Ana, ¿quién gana?, describe la estrategia que debe seguir para ganar.

Solución. Veamos que Eva gana si usa la siguiente estrategia: Si Ana pone m fichas, Eva debe poner $4 - m$ fichas. De

esta manera, en cada turno, al terminar Eva, se habrán puesto un múltiplo de 4 fichas. Como hay 81 casillas, la última ficha la pondrá Ana, y entonces Eva gana.

Problema 3. (Puebla) Los números enteros del 1 al 9 se escriben en los cuadros de la siguiente cuadrícula, uno en cada cuadro sin repetir. Los números que están a la derecha de cada fila son el producto de los dígitos escritos en la fila. Los números que están abajo de cada columna son el producto de los dígitos escritos en la columna. Encuentra el valor de la suma de los números escritos en los cuadros de las esquinas de la cuadrícula.



R:22

Solución. Notemos que los números $14, 15, 64, 144, 180, 378$ son producto de tres dígitos (y sin importar el orden) de una única terna de dígitos:
$14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$
$15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$
$64 = 2 \cdot 4 \cdot 8$
$144 = 3 \cdot 6 \cdot 8$
$180 = 4 \cdot 5 \cdot 9$
$378 = 6 \cdot 7 \cdot 9$

1		5
7		9

El número del cuadrado de la esquina superior izquierda es el número común de la primera fila y la primera columna, que es 1.
El número del cuadrado de la esquina superior derecha es el número común de la primera fila y la tercera columna, que es 5.
El número del cuadrado de la esquina inferior izquierda es el número común de la tercera fila y la primera columna, lo que es 7.
El número del cuadrado de la esquina inferior derecha es el número común de la tercera fila y la tercera columna, que es 9.
Luego la suma que se pide es $1 + 5 + 7 + 9 = 22$.

Problema 4. (Coahuila) ¿Cuántos números de tres dígitos abc (con $a \neq 0$), tienen la propiedad de que los números de dos dígitos ab y bc son números primos?

Nota. *El número* 137 *tiene la propiedad ya que* 13 *y* 37 *son primos. Y el número* 139 *no la tiene ya que* 39 *no es primo.*

Solución. Los números primos de dos cifras tienen como dígito de las unidades a un número impar diferente de 5. Luego c solamente pueden ser alguno de $1, 3, 7, 9$.
Los números primos de dos dígitos que terminan en 1 son los siguientes 5 números: 11, 31, 41, 61 , 71; los que terminan en 3 son $13, 23, 43, 53, 73, 83$ que son 6; los que terminan en 7 son cinco $17, 37, 47, 67, 97$ y los que terminan en 9 son cinco $19, 29, 59, 79, 89$. Veamos por casos de c.
Caso $c = 1$, hay cinco primos de la forma $b1$, pero como ab es también primo, b no puede ser 4 o 6. Luego bc es solamente uno de $11, 31, 71$, ahora en cada caso, hay $5, 6, 5$ posibles valores de ab, en este caso donde $c = 1$, tenemos 16 números abc.
Caso $c = 3$, de nuevo hay seis posibles primos de dos cifras de la forma $b3$, pero como ab debe ser primo, solamente debemos de considerar a 13 y 73. Las posibilidades para $a1$ son cinco y para las de $a7$ son cinco, así en este caso donde $c = 3$ hay 10 números abc.
Caso $c = 7$, de los cinco posibles números $b7$ solamente nos fijaremos en 17, en 37 y en 97, en los otros ab no será primo. Primos de la forma $a1$, hay cinco, primos de la forma $a3$ hay seis y primos de la forma $a7$ hay cinco, así en este caso con $c = 7$, hay 16 números abc que cumplen la propiedad.
Caso 9, de igual manera solamente serán de interés el 19 y el 79, para el primero hay cinco primos de la forma $a1$ y hay cinco de la forma $a7$, por lo que en este último caso hay 10 números abc de los que se buscan.
Luego en total hay $16 + 10 + 16 + 10 = 52$ números de tres dígitos abc con ab y bc primos.

Otra solución. Los posibles valores de b son $1, 3, 7, 9$. Si $b = 1$, entonces los valores posibles de a son $1, 3, 4, 6, 7$ y los de c son $1, 3, 7, 9$, lo que da 20 maneras de escoger el número abc. Si $b = 3$, entonces los valores posibles a son $1, 2, 4, 5, 7, 8$ y los de c son $1, 7$, lo que da 12 números más de la forma abc. Si $b = 7$, entonces los valores posibles a son $1, 3, 4, 6, 9$ y los de c son $1, 3, 9$, lo que da 15 números más de la forma abc. Ahora si $b = 9$, entonces valores posibles de a son $1, 2, 5, 7, 9$ y los de c son 7, lo que da 5 números más de la forma abc. Luego en total hay $20 + 12 + 15 + 5 = 52$ números de tres dígitos que cumplen lo requerido.

Problema 5. (Chihuahua) Un número entero se dice que es *ocholate* si cumple las siguientes condiciones:

1. Todos sus dígitos aparecen en orden creciente.
2. Es múltiplo de 8

De los números *ocholates* de cuatro cifras, ¿cuál es la diferencia entre el mayor y el doble del menor de ellos?

Nota. *El número* 1456 *es ocholate y los siguientes no son ocholates* 1240*,* 1448*.*

R:960

Solución. Por las condiciones del problema y el criterio de divisibilidad entre 8, un número ordenado de 4 dígitos debe terminar en 248, 256 y 456. Por lo que hay 5 números ordenados de 4 cifras: 1248, 1256, 1456, 2456, 3456. La diferencia entre el mayor y el doble del menor es 960.

Problema 6. (San Luis Potosí) Usando solo los vértices de un cubo se pueden formar 56 triángulos, ¿cuántos de estos triángulos son escalenos, es decir con sus tres lados de longitudes diferentes?

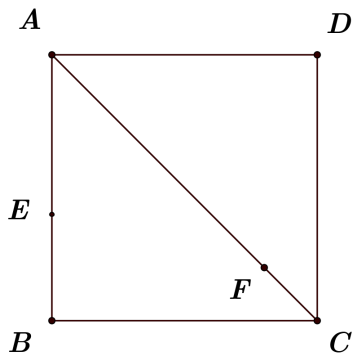
Solución. Hay 4 triángulos isósceles sobre cada cara de un cubo, dos por cada diagonal de la cara. Y para cada vértice del cubo, se tiene que hay tres caras que lo comparten, entonces usando las diagonales de estas tres caras (las diagonales que no usan el vértice del cubo tomado), se forma un triángulo equilátero (que desde luego es isósceles), y de estos triángulos hay 8. Por tanto se forman $(4 \times 6) + 8 = 32$ triángulos isósceles o que son equiláteros. Luego de los $\binom{8}{3} = 56$ triángulos que se forman con los vértices, hay $56 - 32 = 24$ que son escalenos.
Otra solución. Si el cubo es de lado 1, las distancias posibles entre vértices del cubo son solamente 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y la distancia $\sqrt{3}$ se logra con vértices "opuestos" del cubo o extremos de diagonales mayores, de las que hay 4. Tomemos una de estas diagonales, cada vértice de tal diagonal, tiene adyacentes tres aristas del cubo de longitud 1 y el tercer lado para formar el triángulo ya quedó determinado y es una diagonal de una cara, luego hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ triángulos escalenos (que corresponde a 4 diagonales mayores, 3 lados adyacentes a un extremo de la diagonal y el 2 a los dos extremos).

Problema 7. (Baja California) ¿Cuántos números hay en la colección: 1, 2, 3, ..., 2019, 2020 que tengan al menos un dígito igual a 2 o un dígito igual a 0 ?

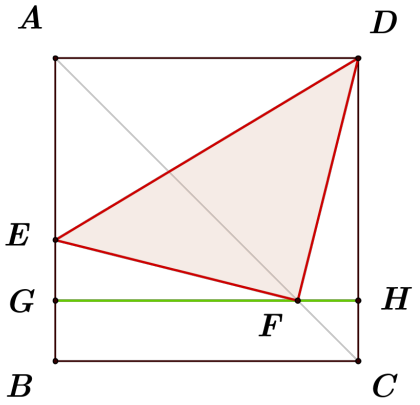
R:924

Solución. Se contará la cantidad de números que no tienen dígitos iguales a 2 ni a 0. Si el número tiene un dígito, solo hay 8 opciones. Si tiene dos dígitos, hay $8 \times 8 = 64$ números. Si el número tiene tres dígitos, hay $8 \times 8 \times 8 = 512$ y, si tiene cuatro dígitos, hay $1 \times 8 \times 8 \times 8 = 512$ números. En total, hay $8 + 64 + 512 + 512 = 1096$ números cuyos dígitos no son ni 2 ni 0, por lo que la cantidad de números que tienen al menos un dígito igual a 2 o 0 es $2020 - 1096 = 924$.

Problema 8. (Comité) Sean $ABCD$ un cuadrado con medida de sus lados igual a $5\,cm$, E un punto en el lado AB con $AE = 3\,cm$ y F un punto en la diagonal AC con $AF = 4FC$. Encuentra,
(1) El valor del área, en cm^2, del triángulo DEF.
(2) Las medidas de los ángulos, en grados, del triángulo DEF.



Solución. Tracemos el segmento GH paralelo a AD y que pase por F, con G y H puntos de los lados AB y CD, respectivamente. Como HF es paralela a DA por el teorema de Tales, $\frac{DH}{HC} = \frac{AF}{FC} = 4$, luego $DH = 4$ y $HC = 1$, y también $EG = FH = HC = 1$ y $GF = 4$. Por lo que los triángulos rectángulos EGF y FHD son congruentes.



Tenemos entonces que el triángulo DEF es isósceles con $EF = FD = \sqrt{17}$, además como $\angle HFD + \angle EFG = 90°$ tenemos que $\angle DFE = 90°$. Luego el triángulo DEF tiene un ángulo de $90°$ y dos iguales de $45°$; además su área es igual $(DEF) = \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{17}{2}$.