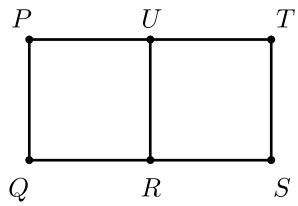
Soluciones Nivel 1

Individual

Problema 1. (Puebla) En la siguiente figura hay dos cuadrados unidos. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar de manera que sus tres vértices sean puntos de P, Q, R, S, T, U?



R:14

Solución. Si la longitud del lado del cuadrado es 1, los diferentes tipos de triángulos rectángulos son: *a*) triángulos con catetos de longitudes 1 y 2, de los cuales hay 4; *b*) triángulos isósceles con catetos de longitud 1, de los que hay 8; *c*) triángulos isósceles con catetos de longitud $\sqrt{2}$, de los que hay 2. En total hay 14 triángulos rectángulos.

Problema 2. (Tabasco) El número 13 es primo, y tiene la propiedad que al escribir sus dos dígitos (cifras) al revés se obtiene un número primo, en este caso el primo 31. ¿Cuántos números primos de dos dígitos tienen esta propiedad?

R:9

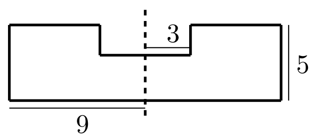
Solución. Cualquier número que termine en $2, 4, 6$ u 8 es par, por lo cual el número no es primo. De la misma manera, no es primo cualquier número que termine en 5 ya que es divisible entre 5. Además, para que un número de dos dígitos y el escrito al revés sean primos, el número original debe empezar solo con 1, 3, 7 o 9. Hay 10 primos de dos dígitos que empiezan por 1, 3, 7 o 9, que son: 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 y 97, de estos solo el 19 no tiene al escrito al revés en la lista. Así que hay 9 primos de dos dígitos con esta propiedad.

Problema 3. (Comité) Encuentra el número capicúa más cercano a 2019. Recuerda que un número capicúa es aquel que sus dígitos (cifras) se leen de la misma manera de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 1221 y 212 son capicúas.

R:2002

Solución. El capicúa anterior a 2019 es 2002; y el posterior 2112. Como $2019 - 2002 = 17$ y $2112 - 2019 = 93$, se tiene que 2002 es el más cercano.

Problema 4. (Nuevo León) La figura de abajo es simétrica respecto a la recta punteada y se muestran algunas medidas sobre su contorno. Si el perímetro de toda la figura es $50\,cm$, ¿cuál es, en cm^2, el área de la figura?



R:78 cm^2

Solución. Por la simetría podemos encontrar los lados de la figura, excepto el lado pequeño al lado del "3". El perímetro del rectángulo grande (completo) es de $46\,cm$ y aumento a $50\,cm$ al quitar el rectángulo pequeño, luego el lado menor de este rectángulo pequeño es 2. Para calcular el área observamos que la figura se divide en 3 rectángulos de 6×5, 6×3 y 6×5. Por lo que el área es $78\,cm^2$. Otra manera de calcular el área es: restar al área del rectángulo grande, que es 18×5, el área del rectángulo que se quito, que es 6×2.

Problema 5. (Comité) ¿Es posible pagar \$25 pesos con monedas de \$1 peso y monedas de \$5 pesos, usando exactamente 12 monedas?

R:No

Solución. No es posible. La suma de un número par de impares es par.

Problema 6. (Querétaro) Al número de tres dígitos (cifras) $4\square7$ se le suma el número 321 para dar como resultado el número de tres dígitos $7\triangle8$. Si $7\triangle8$ es divisible entre 9, ¿cuánto vale la suma de $\square$ más $\triangle$?
Nota. Cada símbolo $\square$ y $\triangle$ representa un dígito.

R:4

Solución. Si $7\triangle8$ es divisible entre 9 por el criterio de divisibilidad del 9, $\triangle = 3$. Entonces, restando $738 - 321 = 417$, lo que nos dice que $\square = 1$. Finalmente, $\square + \triangle = 1 + 3 = 4$.

Problema 7. (Guerrero) En un tablero de 3×5 cuadritos, ¿cuántos cuadrados se pueden dibujar de manera que sus vértices sean centros de los cuadritos de 1×1 del tablero?

R:14

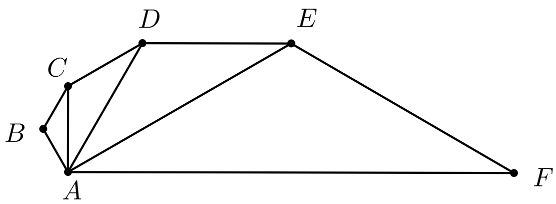
Solución. Solo podemos trazar cuadrados de áreas 1, 2 y 4. El total de los de área 1 coincide con el total de formas de elegir el vértice inferior izquierdo, es decir, 2×4 formas de hacerlo. Para los de área 2, basta con elegir el vértice inferior del rombo dentro del cuadrado de 2×2 que son 3 formas y 3 formas de construir cuadrados de 2×2. Por lo tanto, el total de cuadrados con vértices en los centros de los cuadritos de la cuadrícula es $(2 \times 4) + 3 + 3 = 14$.

Problema 8. (Comité) Luis tiene un nuevo restaurante, su amiga Laura le regaló mesas y sillas. Si las mesas las coloca de forma que cada una tenga 4 sillas, le faltan 6 sillas. Pero si colocan de dos en dos de forma que dos mesas juntas tengan 6 sillas, le sobran 4 sillas. ¿Cuántas mesas recibió Luis de regalo?

R:10

Solución. Fijémonos en el acomodo de las mesas dobles, podemos pensar que a cada mesa le han tocado 3 sillas. En este acomodo, tenemos que sobran 4 sillas. Ahora separemos las mesas dobles, y coloquemos 3 sillas por mesa, notemos que estamos usando todas las mesas. Con las 4 sillas sobrantes podemos completar 4 mesas con 4 sillas. Pero en el acomodo de mesas con 4 sillas nos faltan 6 sillas, pero como tenemos ya todas las mesas con 3 sillas (y las 4 ya con 4 sillas), hay 6 mesas incompletas. Por lo tanto, son 10 mesas las que Luis recibió de regalo.

Problema 9. (San Luis Potosí) En la figura se muestra un triángulo ABC donde $\angle ABC = 120°$. Además, se cumple que $AB = BC$, $AC = CD$, $AD = DE$, $AE = EF$ y que $\angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = 150°$. ¿Cuál es el valor, en grados, del ángulo $\angle EFA$?



R:30°

Solución. Ya que $AB = AC$ y $\angle ABC = 120°$, entonces $\angle BCA = 30°$. Luego, $\angle ACD = 120°$ ya que $\angle BCD = 150°$. Análogamente, como $CA = AD$, se obtiene que $\angle CDA = 30°$. De igual manera, se llega a que $\angle DEA = 30°$ y, por lo tanto, $\angle EFA = 30°$.

Problema 10. (Comité) Las caras de un dado tienen los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lalo forma números siguiendo tres pasos: *Paso 1.* Escoge tres caras y multiplica los tres números de estas caras; *Paso 2.* Encuentra el producto de los números de las otras tres caras; *Paso 3.* El número lo forma sumando los dos resultados anteriores. ¿Cuál es el número más pequeño que puede formar Lalo de esta manera?

R:54

Solución. El número más pequeño que se puede obtener es cuando se acomodan de alguna de las siguientes formas:

$$6 \times 5 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 = 54$$

$$6 \times 4 \times 1 + 5 \times 3 \times 2 = 54$$

Problema 11. (Morelos) ¿Cuántos números de dos dígitos (cifras) son iguales a la suma de sus dos dígitos más el producto de sus dos dígitos?

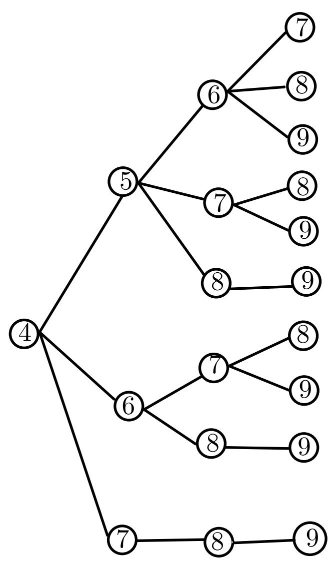
R:9

Solución. El número ab cumple lo requerido si: $10a + b = a + b + a \cdot b$, por lo que $9a = a \cdot b$, y como a no es cero, se tiene que $b = 9$. Luego los números son $19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99$.

Problema 12. (Comité) Un número entero se llama *ascendente* si cada uno de sus dígitos (salvo el primero a la izquierda) es mayor que el dígito que está a su izquierda. Por ejemplo 2478 es un número ascendente. ¿Cuántos números ascendentes hay entre 4000 y 5000?

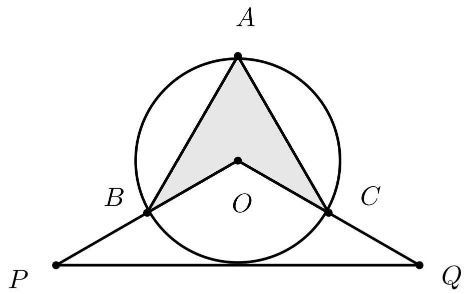
R:10

Solución. El número de las unidades de millar es 4, el dígito de las centenas puede ser solamente 5, 6 o 7, en cada caso el dígito de las decenas es 6, 7 u 8, 7 u 8, 8, ahora el dígito de las unidades es en cada subcaso: 7, 8 o 9, 8 o 9, 9, 8 o 9, 9 y 9. Esto se muestra en el siguiente diagrama.



La respuesta es hay 10 números ascendentes.

Problema 13. (Chihuahua) En la siguiente figura el triángulo OPQ es isósceles con $OP = OQ$. La circunferencia de centro O y radio $\frac{OQ}{2}$ corta a OP en B, corta a OQ en C y toca a PQ (tangentemente). El punto A sobre la circunferencia cumple que $AB = AC$. Si el área sombreada vale $2\,cm^2$, ¿cuál es el valor, en cm^2, del área del triángulo OPQ?



R:4

Solución. Sea D el punto de tangencia de la circunferencia con PQ. La simetría de la figura permite ver que $DB = DC$ y, por lo tanto, A, O y D son colineales con $OA = OD$. Esto implica que el área del cuadrilátero $OBDC$ es igual al área sombreada, es decir, vale 2. Además, es claro que $(OPQ) = 2(OPD)$ pero, como $OP = 2OB$ (por cómo se construyó B), entonces $(OBDC) = 2(OBD) = (OPD)$. Por lo tanto, $(OPQ) = 2(OBDC) = 4$.
Segunda Solución. Sea D el punto de tangencia de la circunferencia con PQ. Como $OP = OQ$ y OD es común a los triángulos rectángulos OPD y OQD, estos son congruentes y por tanto de la misma área. También por tener lados correspondientes iguales, son congruentes los triángulos ABO y ACO. Como consecuencia, A, O y D son colineales. C omo $AO = OD$ los triángulos ABO y OBD tienen la misma área, análogamente ACO y OCD tienen la misma área. Luego todos triángulos ABO, BOD, BPD, CDQ, ODC y AOC tienen área igual a 1, por lo que el área de OPQ es igual a 4.

Problema 14. (Comité) (a) ¿Puedes escribir a 2048 como suma de enteros consecutivos?
(b) ¿Puedes escribir a 2048 como suma de enteros positivos consecutivos?

R:Sí, No

Solución. (a) Sí es posible,

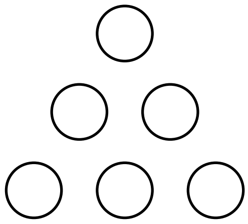
$$(-2047) + (-2046) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots + 2047 + 2048 = 2048$$

.
(b) No es posible. La suma de r enteros positivos consecutivos es de la forma,

$$(n+1) + \cdots + (n+r) = nr + \tfrac{r(r+1)}{2} = \tfrac{r(2n+r+1)}{2}.$$

Veamos que uno de los factores r o $(2n + r + 1)$ es impar. Es claro si r es impar. Pero si r es par entonces $r + 1$ es impar y también $(2n + r + 1)$ es impar. Luego, como $2048 = 2^{11}$ no tiene factores impares, no es posible escribirlo como suma de enteros positivos consecutivos.

Problema 15. (Tabasco) Lucy colocó los números 2, 3, 4, 5, 6 y 10 en los círculos de tal manera que el producto de los tres números de cada lado es el mismo, y cuidó que el producto fuera lo más grande posible. ¿Cuál es el valor de tal producto?



R:120

Solución. Escribimos los números dados como producto de primos: $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 2^2$ $5 = 5$, $6 = 2 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$. Notemos que solo hay dos factores 3 y dos factores 5, entonces 3 y 6 no pueden estar sobre un "lado" del triángulo, análogamente pasa con el 5 y 10. Salvo rotaciones y reflexiones hay cuatro maneras de acomodar los números $3, 5, 6, 10$ que son las siguientes.

De ahí hay 2 posibilidades de acomodar los números 2 y 4 y revisando las 8 formas se verifica que el máximo es 120.

Equipos

Problema 1. (Chiapas) La suma rara (simbolizada con $\oplus$) es la suma normal más 1, por ejemplo $2 \oplus 3 = 2+3+1 = 6$, $1 \oplus 0 = 1+0+1 = 2$.
Encuentra el valor de:

$$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus \cdots 1 \oplus 0$$

en donde el 0 se ha escrito 100 veces.

R:299

Solución. Observemos que $n \oplus 0 = n + 1$. La sucesión de sumas parciales

$$1,\ 1 \oplus 0,\ 1 \oplus 0 \oplus 1,\ 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0,\ \cdots$$

resulta ser

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \cdots$$

Que es la sucesión que inicia con el número 1, luego alternadamente los siguientes dos pares consecutivos y después los siguientes dos impares consecutivos, y así sucesivamente. El valor buscado corresponde al término 200 de la sucesión. El término en la posición de la forma $4m$ es $6m - 1$, luego el término 200 es $6(50) - 1 = 299$.

Solución alternativa : Podemos agrupar en 100 parejas como sigue

$$[1 \oplus 0] \oplus [1 \oplus 0] \oplus \cdots [1 \oplus 0]$$

donde cada $[1 \oplus 0)] = 2$, así que la operación buscada es

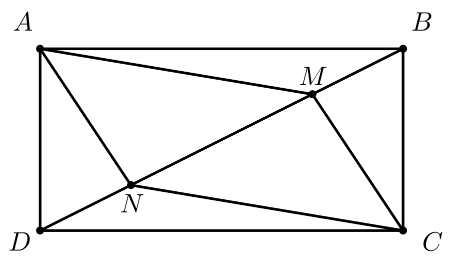
$$2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus \cdots \oplus 2$$

donde los números 2 aparecen 100 veces. Como en cada una de las sumas ejecutadas se agrega un 1 adicional a los dos que se suman y como hay 99 símbolos $\oplus$, tenemos que sumar todos los números 2 y agregar 1 por cada símbolo $\oplus$. El resultado es $100(2) + 99(1) = 299$.

Problema 2. (Guerrero) ¿De cuántas formas podemos cambiar un billete de \$100 pesos por monedas de \$5 pesos y de \$2 pesos, si tenemos que utilizar al menos una moneda de cada denominación?

Solución. El cambio se debe dar con un número par de monedas de \$5 pesos y completar con monedas de \$2 pesos, hasta llegar a los \$100 pesos. Como debe utilizar al menos una moneda de cada denominación, entonces se deben de utilizar 2 o 4 o 6 ... o 18 monedas de \$5 pesos. Luego hay 9 maneras de poder cambiar el billete.

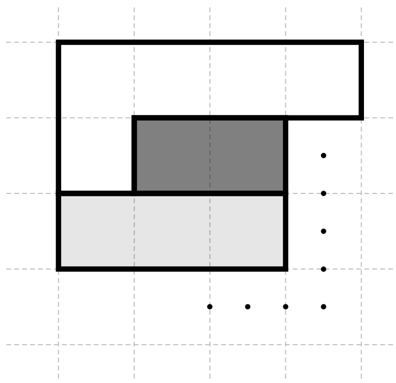
Problema 3. (Guerrero) En un rectángulo $ABCD$ de área $40\,cm^2$, se construye el cuadrilátero $AMCN$ donde M y N son puntos en la diagonal BD de manera que $BM = 3\,cm$, $MN = 4\,cm$ y $ND = 3\,cm$. ¿Cuál es, en cm^2, el área del cuadrilátero $AMCN$?



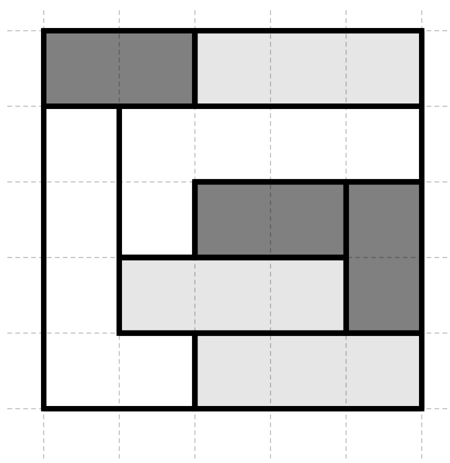
R:16

Solución. Ya que $MN = 4$ y $BD = 3 + 4 + 3 = 10$, entonces $\frac{(AMN)}{(ABD)} = \frac{MN}{BD} = \frac{4}{10}$. Por la simetría de la figura, se tiene que $(AMCN) = 2(AMN)$ y que $(ABCD) = 2(ABD)$, por lo que $(ABD) = \frac{(ABCD)}{2} = 20$. Por lo tanto, $(AMCN) = 2(AMN) = 2\left(\frac{4}{10}\right)(ABD) = \left(\frac{4}{5}\right)(20) = 16$.

Problema 4. (San Luis Potosí) Marián comienza a pintar cuadritos siguiendo un patrón en espiral: pinta 2 negros, 3 grises, 5 blancos y luego repite pintando 2 negros, 3 grises, 5 blancos y así sucesivamente, tal como se observa en la figura. Marián deja de pintar cuando la figura sea un cuadrado. ¿Cuántos cuadritos pintó Marián?

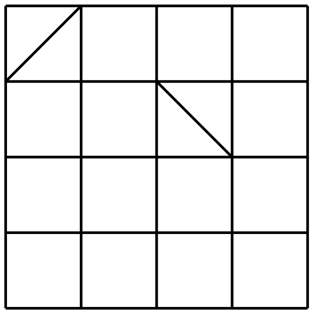


Solución. Para que la figura pintada sea un cuadrado, el número de cuadritos pintados debe ser un cuadrado perfecto. La primera vez que sucede esto es cuando hay 25 cuadritos pintados (25=2+3+5+2+3+5+2+3, es fácil ver que no se obtienen cuadrados perfectos antes). Para verificar que, en efecto, la figura pintada será un cuadrado perfecto, se muestra la figura. Por lo tanto, el número de cuadritos pintados por Marián cuando termine es 25.



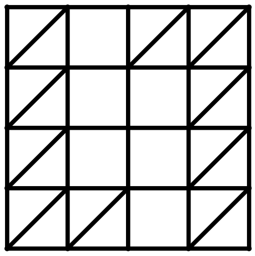
Problema 5. (Puebla) Considera un tablero de 4×4 con 16 cuadritos. ¿Cuál es el mayor número de diagonales de cuadritos que se pueden dibujar, de manera que cualesquiera dos diagonales no tengan puntos comunes?

Nota. Por ejemplo se pueden dibujar diagonales como en la siguiente figura.

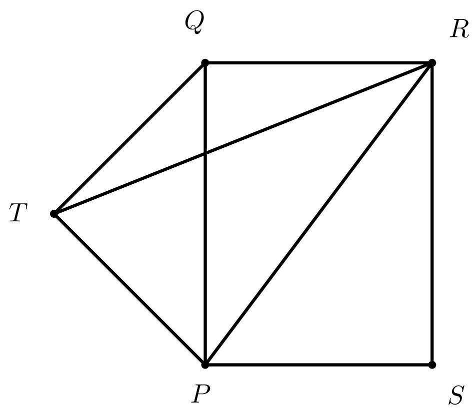


$\boxed{\text{R:}10}$

Solución. La respuesta es 10. Hay varias maneras de elegirlas, la siguiente es una de ellas.



Problema 6. (Oaxaca) En el diagrama, $PQRS$ es un rectángulo. El punto T está fuera del rectángulo y de manera que PQT es un triángulo con $PT = QT$ y $\angle PTQ = 90°$. Si $PQ = 4\,cm$ y $QR = 3\,cm$, encuentra, en cm^2, el área del triángulo PRT.

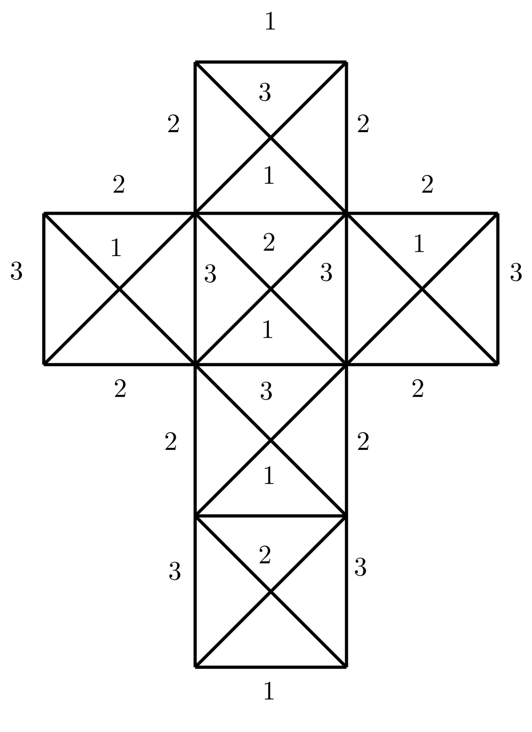


Solución. Primero, $(PRQ) = \frac{3\cdot4}{2} = 6$. Ahora, sea M el punto medio de PQ, que también es el pie de altura desde T hasta PQ. Como PQT es un triángulo rectángulo isósceles, entonces $QM = TM = PM = 2$. Luego, $(PQT) = \frac{4\cdot2}{2} = 4$, por lo que $(PRQT) = (PQT) + (PRQ) = 10$. Además, claramente la altura desde T hasta la recta QR mide lo mismo que QM, es decir, 2. Entonces, $(TRQ) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$. Por lo tanto, $(PRT) = (PTQR) - (TRQ) = 10 - 3 = 7$.

Problema 7. (Comité) Sobre cada una de las caras de un cubo se trazan las dos diagonales. Cada una de las aristas del cubo y cada una de las diagonales trazadas se quieren etiquetar con uno de los números 1, 2, 3 de manera que todos los triángulos que se formen con tres de estos segmentos tengan las tres etiquetas en algún orden sobre sus lados. Da una manera de etiquetar.

R:

Solución. Desdoblando el cubo podemos hacer el siguiente etiquetado, donde las diagonales en cada cara tienen la misma etiqueta:



Problema 8. (Oaxaca) Si $wxyz$ es un entero positivo de cuatro dígitos (cifras) con w diferente de 0, se llama *la suma de capas* de este entero a la suma $wxyz+xyz+yz+z$. Por ejemplo, la suma de capas del entero 4089 es $4089+089+89+9 = 4276$.
a) ¿Es posible que la suma de capas de algún entero $wxyz$ sea igual a 2019?
b) ¿Es posible que la suma de capas de algún entero $wxyz$ sea igual a 2020?

Solución. *a*) No es posible porque la última cifra de la suma de capas se obtiene de la última cifra de $4 \times z$ y ningún producto de ésta forma termina en 9. *b*) Sí se puede con 1505 o con 2005.