Compilación de problemas de olimpiada

Olimpiada de Matemáticas en Guanajuato

2003

Contenido

Capítulo 1

Problemas introductorios

Problema 1.1 Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel original quedó después de cortar tres veces?

(a) 2/3 (b) 4/3 (c) 4/9 (d) 8/9 (e) 8/27

Problema 1.2 Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando canicas del costal. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color?

(a) 1960 (b) 1977 (c) 1981 (d) 1995 (e) 2001

Problema 1.3 En el rectángulo de la figura 1.1, M y N son los puntos medios de AD y BC, respectivamente, y P y Q son las respectivas intersecciones de AC con BM y con ND. Suponiendo que AD mide 5cm y que AB mide 3cm, ¿cuántos centímetros cuadrados tiene de superficie el cuadrilátero $MPQD$?

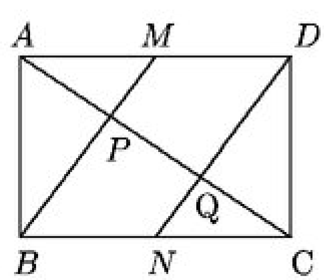


Figura 1.1:

(a) 2.75 (b) 3 (c) 3.25 (d) 3.75 (e) 4

Problema 1.4 A una cantidad le sumo su 10 %, y a la cantidad así obtenida le resto su 10 %. ¿Qué porcentaje de la cantidad original me queda?

(a) 98 (b) 99 (c) 100 (d) 101 (e) 102

Problema 1.5 Dentro del cuadrado de la figura 1.2 se escriben los números enteros del 1 al 9 (sin repetir). La suma de los 4 números alrededor de cada uno de los vértices marcados con flechas tiene que ser 20. Los números 3 y 5 ya han sido escritos. ¿Qué número debe ir en la casilla sombreada?

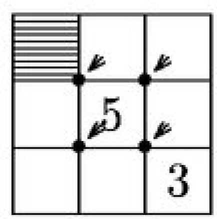


Figura 1.2:

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 7 (e) 9

Problema 1.6 Un círculo cuyo radio mide 1 cm está inscrito en un cuadrado, y éste a su vez está inscrito en otro círculo, como se muestra en la figura 1.3. ¿Cuántos centímetros mide el radio de este último círculo?

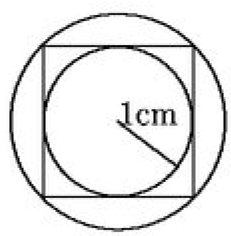


Figura 1.3:

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}/2$ (d) $\sqrt{3}$ (e) $\sqrt{3}/2$

Problema 1.7 Con tres rectángulos iguales se formó un rectángulo más grande, como el que se muestra en la figura 1.4. Si la longitud $BC = 2$, ¿Cuál es la longitud de AB?

(a) 2.5 (b) 3 (c) 3.5 (d) 4 (e) 4.5

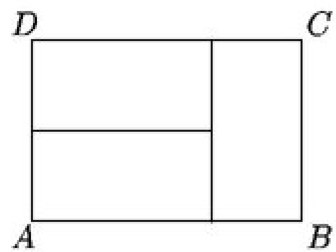


Figura 1.4:

Problema 1.8 La suma de tres números impares consecutivos es igual a 27. ¿Cuál es el número más pequeño de esos tres?

(a) 11 (b) 9 (c) 8 (d) 7 (e) 5

Problema 1.9 En la figura 1.5, cada lado del cuadrado $ABCD$ mide 1 m. ¿Cuál es el área del cuadrado $AKPC$ en metros cuadrados?

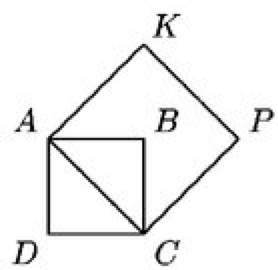


Figura 1.5:

(a) 1 (b) 1.5 (c) 2 (d) 2.5 (e) 3

Problema 1.10 Utilizando cada una de las cifras 1, 2, 3 y 4 se pueden escribir diferentes números, por ejemplo, podemos escribir 3241. ¿Cuál es la diferencia entre el más grande y el más pequeño de los números que se construyen así?

(a) 2203 (b) 2889 (c) 3003 (d) 3087 (e) 3333

Problema 1.11 Si se dibujan un círculo y un rectángulo en la misma hoja, ¿cuál es el máximo número de puntos comunes que pueden tener?

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 1.12 En la figura 1.6, el área del cuadrado de mayor tamaño es igual a 1 m^2. Una de sus diagonales se divide en tres segmentos de la misma longitud. El segmento de enmedio es la diagonal del pequeño cuadrado gris. ¿Cuál es el área del cuadrado pequeño en metros cuadrados?

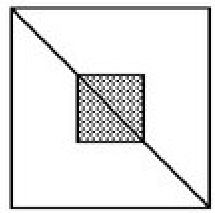


Figura 1.6:

(a) 1/10 (b) 1/9 (c) 1/6 (d) 1/4 (e) 1/3

Problema 1.13 $99 - 97 + 95 - 93 + \cdots + 3 - 1 =$

(a) 48 (b) 64 (c) 32 (d) 50 (e) 0

Problema 1.14 Una sala de cine tiene 26 filas con 24 asientos cada una. El total de los asientos se numera de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 375?

(a) 12 (b) 13 (c) 14 (d) 15 (e) 16

Problema 1.15 El boleto de entrada al Palacio de las Ciencias cuesta 5 pesos por niño y 10 pesos por adulto. Al final del día 50 personas visitaron el Palacio y el ingreso total de las entradas fue de 350 pesos. ¿Cuántos adultos visitaron el Palacio?

(a) 18 (b) 20 (c) 25 (d) 40 (e) 45

Problema 1.16 A un cuadrado de papel se le cortan todas las esquinas ¿Cuál es el máximo número de esquinas que puede quedar?

(a) 0 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Problema 1.17 La figura 1.7 representa una tira larga de papel dividida en 2001 triángulos marcados con líneas punteadas. Supongamos que la tira será doblada siguiendo las líneas punteadas en el orden indicado por los números, de forma que la tira siempre quede en posición horizontal y la parte de la izquierda que ya ha sido doblada se dobla hacia la derecha. ¿Cuál es la posición en que terminan los vértices A,B,C después de 1999 dobleces? Opciones

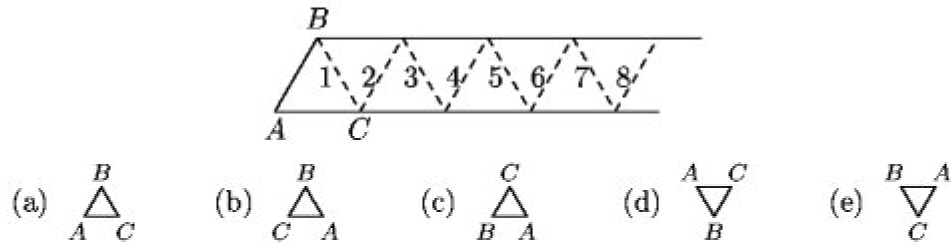


Figura 1.7:

Problema 1.18 Dos triángulos equiláteros iguales se pegan por un lado. Después todas las esquinas de la figura obtenida se juntan en el centro. ¿Qué figura se obtiene?

(a) un triángulo (b) una estrella (c) un rectángulo (d) un hexágono (e) un rombo

Problema 1.19 El entrenador más experimentado del circo necesita 40 minutos para lavar un elefante. Su hijo lleva a cabo la misma tarea en 2 horas. ¿Cuántos minutos tardarán el entrenador y su hijo en lavar 3 elefantes trabajando juntos?

(a) 30 (b) 45 (c) 60 (d) 90 (e) 100

Problema 1.20 Me comí una rebanada de un pastel redondo que representaba el 15 % del pastel, como indica la figura 1.8. ¿Cuál es ángulo que abarca la rebanada del pastel?

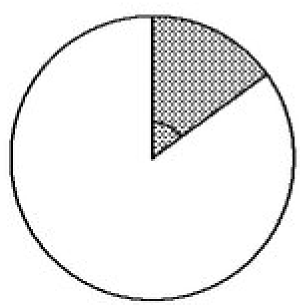


Figura 1.8:

(a) 15 ° (b) 36 ° (c) 45 ° (d) 54 ° (e) 60 °

Problema 1.21 Si 800 pesos tienen el mismo valor que 100 lipras y 100 pesos tienen el mismo valor que 250 bólares, ¿cuántas lipras valen lo mismo que 100 bólares?

(a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 25 (e) 50

Problema 1.22 Una acción en la bolsa de valores vale 1499 pesos en mayo. De mayo a junio la acción aumenta un 10 %. De junio a julio la acción disminuye un 10 %. ¿Cuántos pesos vale a fin de julio?

(a) 1450 (b) 1400 (c) 1390 (d) 1386 (e) 1376

Problema 1.23 Si efectuamos el producto de todos los números impares comprendidos entre 1 y 1994, ¿cuál es la cifra de las unidades del número así obtenido?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Problema 1.24 ¿Qué dígitos hay que eliminar en el número 4921508 para obtener el número de tres dígitos más pequeño posible?

(a) 4, 9, 2, 1 (b) 4, 2, 1, 0 (c) 1, 5, 0, 8 (d) 4, 9, 2, 5 (e) 4, 9, 5, 8

Problema 1.25 En una tira de papel rectangular se dibujan líneas verticales que la dividen en 4 partes iguales. También se dibujan líneas verticales que la dividen en 3 partes iguales. Finalmente, se corta la tira siguiendo las las líneas dibujadas. ¿Cuántos pedazos de diferente longitud se tienen?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 1.26 Cada lado de un rectángulo se divide en tres segmentos de la misma longitud; los puntos obtenidos se unen definiendo un punto en el centro, como se indica en la figura 1.9. ¿Cuánto es el cociente del área de la parte blanca entre el área de la parte gris?

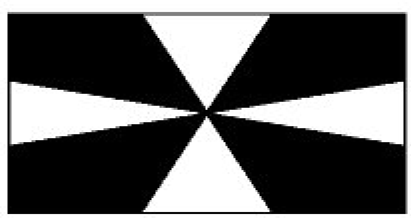


Figura 1.9:

(a) 1 (b) 1/2 (c) 1/3 (d) 1/4 (e) 2/3

Problema 1.27 Al aumentar en la misma proporción la longitud de los lados de un cuadrado, su área aumenta en un 69 %. ¿Qué porcentaje aumentaron sus lados?

(a) 20 % (b) 30 % (c) 34.5 % (d) 8.3 % (e) 69 %

Problema 1.28 ¿Cuánto es la suma de las cifras del número $N = 10^{92} - 92$?

(a) 1992 (b) 992 (c) 818 (d) 808 (e) 798

Problema 1.29 Si escribí todos los números enteros del 1 al 1000, ¿cuántas veces apareció la cifra 5?

(a) 110 (b) 1331 (c) 555 (d) 100 (e) 300

Problema 1.30 A Julio le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es la tercer cifra de su número secreto?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 1.31 ¿Qué relación guardan las áreas de las dos regiones grises marcadas en el rectángulo $PQRS$ de la figura 1.10, si M es un punto cualquiera de la diagonal?

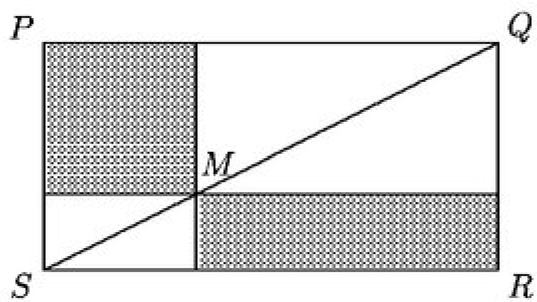


Figura 1.10:

(a) La de arriba es más grande (b) La de abajo es más grande (c) Son iguales (d) Sólo son iguales si M es el punto medio (e) No hay suficientes datos

Problema 1.32 De la ciudad A a la ciudad B hay 3 caminos, de la ciudad A a la ciudad C hay 5 caminos, de la ciudad B a la D hay 2 caminos y de la ciudad C a la D hay dos caminos. Si un camino que une dos ciudades no pasa por otra, ¿cuántas formas hay de ir de la ciudad A a la D?

(a) 12 (b) 16 (c) 19 (d) 32 (e) 60

Problema 1.33 Se construyó un cubo de alambre de 3 cm de lado dividido en 27 cubitos de 1 cm de lado cada uno. ¿Cuántos centímetros de alambre se usaron para marcar las aristas de los cubos (si no hubo desperdicio)?

(a) 25 (b) 64 (c) 72 (d) 120 (e) 144

Problema 1.34 Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 6 y perímetro 14. ¿Cuál es su área?

(a) 3 (b) 7 (c) 10 (d) 14 (e) 28

Problema 1.35 Alicia va al club cada día; Beatriz va cada 2 días; Carlos va cada 3; Daniel cada 4; Enrique cada 5; Francisco cada 6 y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la primera vez que vuelvan a reunirse?

(a) 27 (b) 28 (c) 210 (d) 420 (e) 5040

Problema 1.36 En la figura 1.11, cada lado del cuadrado mide 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

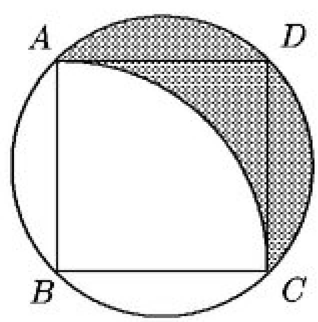


Figura 1.11:

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) $1/2$ (d) $1-\pi/4$ (e) $1-\pi/2$

Problema 1.37 Dos enteros $a>1$ y $b>1$ satisfacen $a^b+b^a=57$. Encuentra la suma $a+b$.

(a) 5 (b) 7 (c) 10 (d) 12 (e) 57

Problema 1.38 En la figura 1.12, $AD=DC$, $AB=AC$, el ángulo $\angle ABC$ mide $75°$ y el ángulo $\angle ADC$ mide $50°$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BAD$?

(a) $30°$ (b) $85°$ (c) $95°$ (d) $125°$ (e) $140°$

Problema 1.39 ¿Cuánto mide el área de la parte sombreada de la figura 1.13?

(a) 9 (b) $3/\sqrt{2}$ (c) 18 (d) 12 (e) $6/\sqrt{3}-\sqrt{2}$

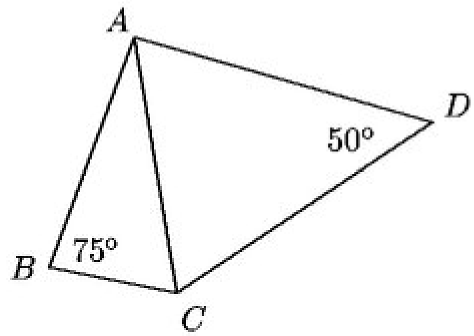


Figura 1.12:

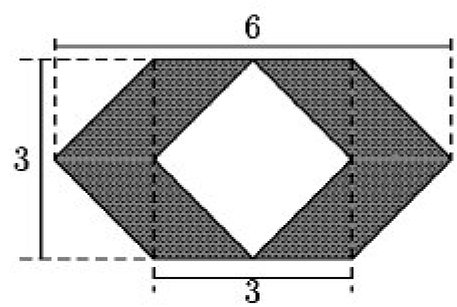


Figura 1.13:

Problema 1.40 El promedio de 5 números es 40. Al eliminar dos de ellos el nuevo promedio es 36. ¿Cuál es el promedio de los dos números eliminados?

(a) 34 (b) 38 (c) 42 (d) 46 (e) 50

Problema 1.41 Si cada letra C, A, N, G, U, R, O, S, corresponde a un dígito entonces

$$10,000 \times UROS - 10,000 \times CANG + CANGUROS$$

es igual a:

(a) $UROSUROS$ (b) $UROSCANG$ (c) $CANGCANG$ (d) $CANGUROS$ (e) $CARUNGOS$

Problema 1.42 En el triángulo ABC de la figura 1.14, $AB = 1$, $BC = 2$ y el ángulo $\angle ABC$ es de 72°. Se rota el triángulo ABC en el sentido de las manecillas del reloj fijando el vértice B, obteniéndose el triángulo $A'BC'$. Si A,B y C' son colineales, y el arco AA' es el descrito por A durante la rotación, ¿cuánto vale el área sombreada?

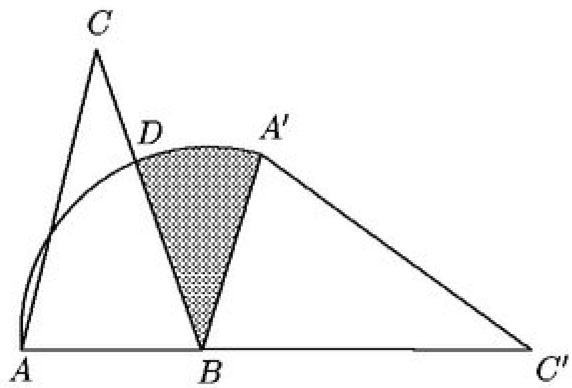


Figura 1.14:

(a) $\pi/6$ (b) $\pi - 3/2$ (c) $\pi/10$ (d) $1 - \pi/2$ (e) $3\pi/8$

Problema 1.43 ¿Cuántos números múltiplos de 6 menores que 1000 tienen la propiedad de que la suma de sus cifras es 21?

(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15 (e) 18

Problema 1.44 Si x es un número par y y un número impar, ¿cuál de los siguientes números no es impar?

(a) $x + y$ (b) $x + x + 1$ (c) $x^2/2$ (d) $(y + y)/2$ (e) $xy + 1$

Problema 1.45 ¿Cuántos números entre 5678 y 9876 tienen la propiedad de que el producto de sus cifras es igual a 343?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 1.46 Como se muestra en la figura 1.15, un barquillo de helado en Planilandia está formado por un triángulo equilátero ABC (el barquillo) y un círculo de radio 1 (la bola de nieve) tangente a AB y AC. El centro del círculo O está en BC. Cuando se derrite el helado se forma el triángulo $AB'C'$ de la misma área que el círculo y con BC y $B'C'$ paralelos. ¿Cuál es la altura del triángulo $AB'C'$?

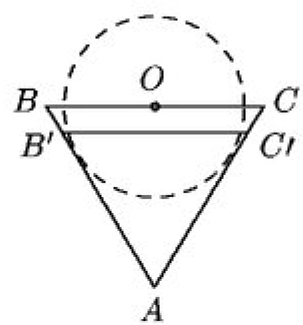


Figura 1.15:

(a) $\sqrt{\pi\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3\pi}$ (c) $\pi\sqrt{3}$ (d) $\pi/\sqrt{3}$ (e) $\sqrt{\pi/\sqrt{3}}$

Problema 1.47 En la figura 1.16 se muestra una mesa que tiene un agujero circular con un diámetro de 12 cm. Sobre el agujero hay una esfera de diámetro 20 cm. Si la mesa tiene 30 cm de altura, ¿cuál es la distancia en centímetros desde el punto más alto de la esfera hasta el piso?

(a) 40 cm (b) 42 cm (c) 45 cm (d) 48 cm (e) 50 cm

Problema 1.48 Un niño corta un cuadrado de tres días por tres días de la página de un calendario. Si la suma de las nueve fechas es divisible entre 10 y sabemos que la fecha de la esquina superior izquierda es múltiplo de 4. ¿Cuál es la fecha de la esquina inferior derecha?

(a) 2 (b) 12 (c) 18 (d) 22 (e) 28

Problema 1.49 Sea f una función de números tal que $f(2) = 3$, y $f(a + b) = f(a) + f(b) + ab$, para toda a y b. Entonces, $f(11)$ es igual a:

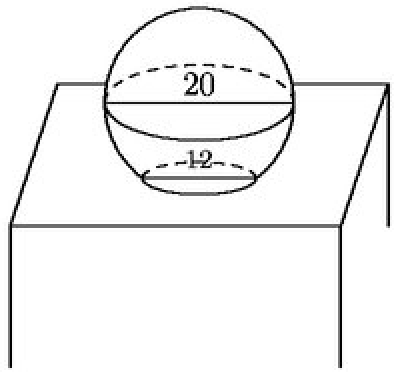


Figura 1.16:

(a) 22 (b) 33 (c) 44 (d) 55 (e) 66

Problema 1.50 ¿Cuál es el dígito de las unidades de $(1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)+\cdots+(2000+2000^2)$?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Problema 1.51 En una hoja de papel cuadriculado cada cuadrito mide 1×1. Se coloca una moneda de diámetro $\sqrt{2}$ encima. ¿Cuál es el máximo número de cuadritos que puede cubrir parcialmente (de manera que la región cubierta en ese cuadrito tenga área mayor que 0) la moneda?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 1.52 Yo salí de mi casa en automóvil a las 8:00 de la mañana. Un automóvil que va al doble de mi velocidad sale también de mi casa, me alcanza exactamente a la mitad del camino y llega 1:30h antes que yo a nuestro lugar de destino. ¿A qué hora salió el otro automóvil?

(a) 8:00 h (b) 8:30 h (c) 9:00 h (d) 9:30 h (e) 10:00 h

Problema 1.53 Un poliedro en forma de balón de futbol como el de la figura 1.17 tiene 32 caras: 20 son hexágonos regulares y 12 son pentágonos regulares. ¿Cuántos vértices tiene el poliedro?

(a) 72 (b) 90 (c) 60 (d) 56 (e) 54

Problema 1.54 Dadas cuatro líneas diferentes, ¿cuántos puntos de intersección NO puede haber entre ellas?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 6

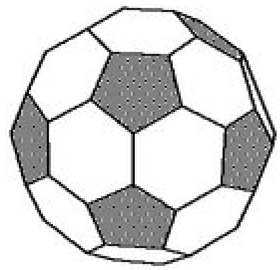


Figura 1.17:

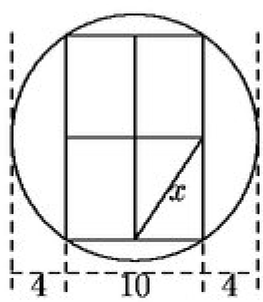


Figura 1.18:

Problema 1.55 ¿Cuál es la longitud de x en la figura 1.18?

(a) $\sqrt{116}$ (b) $4\sqrt{10}$ (c) 9 (d) 12 (e) 18

Problema 1.56 Si $S = 1+2+3+...+100$, ¿cuántos signos $+$ hay que cambiar por signos $-$ para obtener 1991 en lugar de S?

(a) Es imposible (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 1.57 Cinco amigos P, Q, R, S y T se dan la mano. Tanto P como Q estrecharon la mano de uno solo de sus amigos, mientras que R, S y T estrecharon cada uno la mano de dos. Sabemos que P estrechó la mano de T. ¿Quiénes podemos asegurar que no se dieron la mano?

(a) T y S (b) T y R (c) Q y R (d) Q y T (e) Q y S

Problema 1.58 En un concurso de baile los jueces califican a los competidores con números enteros. El promedio de las calificaciones de un competidor es 5.625 ¿Cuál es el número mínimo de jueces para que eso sea posible?

(a) 2 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Problema 1.59 Una caja que compró mamá está llena de chocolates en forma de cubo. Sara se comió todos los del piso de arriba, que eran 77. Después se comió 55, que eran los que quedaban en un costado. Después se comió los que quedaban enfrente. Sobraron algunos chocolates en la caja; ¿cuántos?

(a) 203 (b) 256 (c) 295 (d) 300 (e) 350

Problema 1.60 La maestra distribuyó la misma cantidad de dulces entre cada uno de 5 niños y se quedó tres para ella misma. No se acuerda cuántos dulces tenía, pero se acuerda que era un múltiplo de 6 entre 65 y 100. ¿Cuántos dulces tenía?

(a) 63 (b) 78 (c) 90 (d) 93 (e) 98

Problema 1.61 Los dibujos en la figura 1.19 consisten en cubitos desdoblados. ¿Cuál de ellos corresponde a un cubo en el que cada dos regiones triangulares que comparten una arista son del mismo color?

Problema 1.62 En la figura 1.20 los puntos P, Q, R y S dividen cada lado del rectángulo en razón $1:2$. ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo $PQRS$ y el área de $ABCD$?

(a) 2/5 (b) 3/5 (c) 4/9 (d) 5/9 (e) 2/3

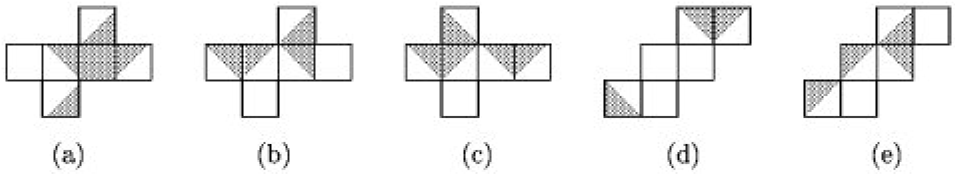


Figura 1.19:

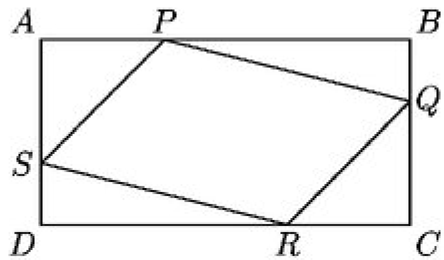


Figura 1.20:

Problema 1.63 Consideremos 48 canicas repartidas en tres montones A, B y C de manera que si del montón A pasamos al B tantas canicas como hay en el B, luego del B pasamos al C tantas canicas como hay en el C y del C pasamos al A tantas como existen ahora en el A, tendremos el mismo número de canicas en cada montón. ¿Cuántas canicas había al principio en el montón A?

(a) 16 (b) 19 (c) 20 (d) 22 (e) 30

Problema 1.64 El producto de tres enteros positivos es 1500 y su suma es 45. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?

(a) 27 (b) 28 (c) 29 (d) 30 (e) 31

Problema 1.65 Se tienen dos círculos con centro en el mismo punto, pero cuyos perímetros difieren en 1 cm. ¿cuál es la diferencia entre sus radios?

(a) $\frac{1}{3\pi}$ cm (b) $\frac{1}{4\pi}$ cm (c) π cm (d) 2π cm (e) 4π cm

Problema 1.66 Un zoológico tiene forma hexagonal con celdas que son triángulos equiláteros de lado 10, como en la figura 1.21. En este zoológico se quieren poner 1000 animales salvajes; por seguridad no puede haber dos animales en una misma celda y si una celda está ocupada ninguna de las que comparte un lado con ella puede estarlo. ¿Cuánto mide el lado del hexágono más chico que tiene esta propiedad?

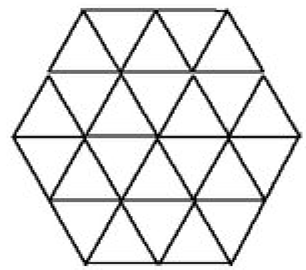


Figura 1.21:

(a) 13 (b) 16 (c) 19 (d) 22 (e) 25

Problema 1.67 Se escriben en sucesión todos los números del 1 al 2001, en orden, uno a continuación del otro, para formar un número muy grande que llamaremos G (es decir, $G = 1234567891011\ldots20002001$) ¿Cuál es la cifra central de G?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Problema 1.68 La figura 1.22 se forma a partir de un triángulo equilátero de área 1 prolongando cada lado dos veces su longitud en ambas direcciones. El área de esta figura es:

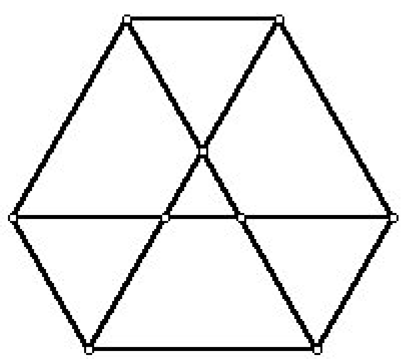


Figura 1.22:

(a) 31 (b) 36 (c) 37 (d) 41 (e) 42

Problema 1.69 El resultado de la operación siguiente: $1-2-3+4+5-6-7+8+\cdots-1998-1999+2000$ es

(a) $\frac{2001\times2002}{2}$ (b) $\frac{2002-2000}{2}$ (c) 2001 (d) 0 (e) 2

Problema 1.70 Una flor se ha dibujado dentro de un círculo manteniendo la misma apertura del compás, como se muestra en la figura 1.23. Si el perímetro de la flor es 2, ¿cuál es el radio del círculo?

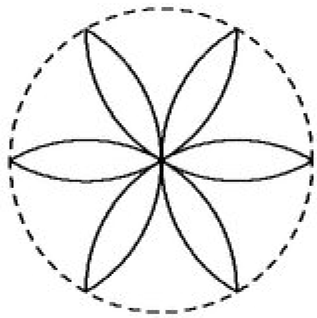


Figura 1.23:

(a) $\frac{1}{2\pi}$ (b) $\frac{1}{4\pi}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$ (e) $\frac{\pi}{8}$

Problema 1.71 ¿Cuántas parejas de enteros positivos (a, b) satisfacen $a^2 - b^2 = 15$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 1.72 En la figura 1.24, $ABCDE$ representa un pentágono regular (de 1 cm de lado) y ABP es un triángulo equilátero. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle BCP$?

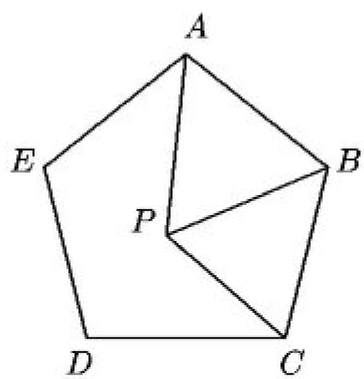


Figura 1.24:

(a) 45° (b) 54° (c) 60° (d) 66° (e) 72°

Problema 1.73 El número -1 es solución de la ecuación de segundo grado $3x^2 + bx + c = 0$. Si los coeficientes b y c son números primos, el valor de $3c - b$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 1.74 Una sucesión se forma de la manera siguiente: el primer término es 2 y cada uno de los términos siguientes se obtiene del anterior elevándolo al cuadrado y restando 1 (los primeros términos son $2, 2^2 - 1 = 3$, $3^2 - 1 = 8$, $8^2 - 1 = 63, \ldots$). La cantidad de números primos que hay en la sucesión es:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) Infinita

Problema 1.75 El número de triángulos con sus tres vértices en los puntos de la figura 1.25 es:

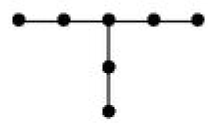


Figura 1.25:

(a) 20 (b) 24 (c) 28 (d) 32 (e) 36

Problema 1.76 En la figura 1.26, el paralelogramo $ABCD$ tiene área 1 m^2 y los puntos M y N son los puntos medios de los lados AB y CD respectivamente, ¿qué área tiene la región sombreada?

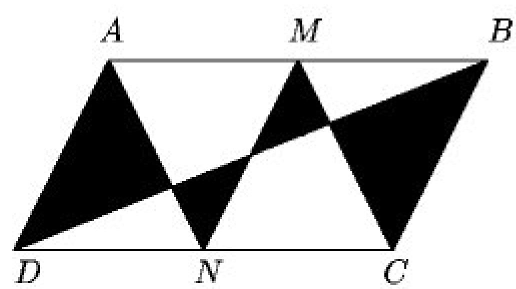


Figura 1.26:

(a) 3/12 (b) 1/3 (c) 5/12 (d) 1/2 (e) 7/12

Problema 1.77 Dos ciclistas recorren una pista cuadrada en direcciones opuestas. Partiendo de una esquina al mismo tiempo, la primera vez que se encuentran es en otra esquina y la segunda en una esquina distinta de las anteriores. Si ambos van a velocidad constante la razón de las velocidades es:

(a) 1 : 2 (b) 1 : 3 (c) 1 : 4 (d) 2 : 3 (e) 3 : 4

Problema 1.78 Luis Miguel compró una bolsa con 2000 caramelos de 5 colores; 387 de eran blancos, 396 amarillos, 402 rojos, 407 verdes y 408 cafés. Decidió comerse los caramelos de la siguiente forma: Sin mirar sacaba tres de la bolsa. Si los tres eran del mismo color, se los comía, si no, los regresaba a la bolsa. Continuó así hasta que sólo quedaron dos caramelos en la bolsa. ¿De qué color eran?

(a) Blancos (b) Amarillos (c) Rojos (d) Verdes (e) Cafés

Problema 1.79 En un triángulo ABC, siete segmentos paralelos al lado BC y con extremos en los otros dos lados del triángulo dividen en 8 partes iguales al lado AC. Si $BC = 10$, ¿cuál es la suma de las longitudes de los siete segmentos?

(a) Faltan datos (b) 50 (c) 70 (d) 35 (e) 45

Problema 1.80 Un cuadrado de lado 2 se "redondea" añadiéndole un marco de 2 cm de ancho (en las esquinas se han puesto cuartos de círculo, como en la figura 1.27). Una rueda de radio 1 cm se desplaza a lo largo del cuadrado redondeado (siempre tocándolo). ¿Cuántas vueltas completas dará la rueda alrededor de sí misma antes de completar una vuelta alrededor del cuadrado redondeado? (a) 3 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

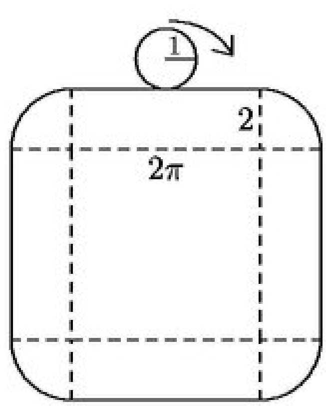


Figura 1.27:

Problema 1.81 Un pedazo rectangular de piel mágica se reduce a la mitad de su longitud y a la tercera parte de su ancho después de cumplirle un deseo a su dueño. Después de tres deseos tiene un área de 4 cm^2. Si su ancho inicial era de 9 cm, ¿cuál era su largo inicial?

(a) Faltan datos (b) 96 cm (c) 288 cm (d) 32 cm (e) 144 cm

Problema 1.82 En un campamento de verano 96 niños van a separarse en grupos de forma que cada grupo tenga el mismo número de niños. ¿De cuántas maneras puede hacerse la separación si cada grupo debe de tener más de 5 pero menos de 20 niños?

(a) 10 (b) 8 (c) 5 (d) 4 (e) 2

Problema 1.83 Si haces la división de 1 entre 52000, ¿cuál será el último dígito que aparezca antes de llegar a puros 0's?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 5

Problema 1.84 ¿Cuál de los siguientes números es más grande?

(a) 2^{12} (b) 4^{15} (c) 8^{11} (d) 12^8 (e) 32^6

Problema 1.85 ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{1998} \times 5^{2002}$?

(a) 1999 (b) 2000 (c) 2001 (d) 2002 (e) 2003

Problema 1.86 Omar le da a cada uno de sus libros una clave de tres letras utilizando el orden alfabético: AAA, AAB, AAC,..., AAZ, ABA, ABB, etc. Considerando el alfabeto de 26 letras y que Omar tiene 2203 libros, ¿cuál fue el último código que Omar utilizó en su colección?

(a) CFS (b) CHT (c) DGS (d) DFT (e) DGU

Problema 1.87 Se escriben los números enteros del 0 al 2000 y se dibujan flechas entre ellos con el patrón de la figura **??** y así sucesivamente. ¿Cuál es la sucesión de flechas que llevan del 1997 al 2000?

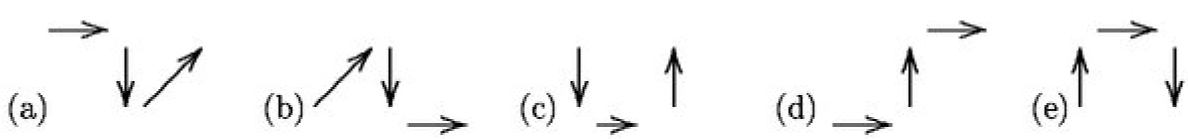


Figura 1.28:

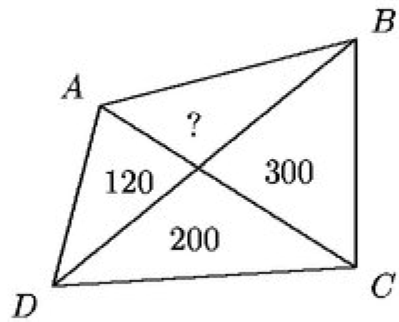


Figura 1.29:

Problema 1.88 Un pastel tiene forma de cuadrilátero. Lo partimos por sus diagonales en cuatro partes, como se indica en la figura 1.29. Yo me comí una parte, y después pesé las otras tres: un pedazo de 120 g, uno de 200 g y otro de 300 g. ¿Cuánto pesaba la parte que yo me comí?

(a) 120 g (b) 180 g (c) 280 g (d) 330 g (e) 550 g

Problema 1.89 Tomando tres vértices cualesquiera de un cubo se forma un triángulo. Del total de triángulos que pueden formarse de esa manera, ¿cuántos son equiláteros?

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 48 (e) 56

Problema 1.90 En la figura 1.30, a, b, c, d, e y f son las áreas de las regiones correspondientes. Si todos ellos son números enteros positivos diferentes entre sí y menores que 10, cada triángulo formado por tres regiones tiene área par y el área de la estrella completa es 31, el valor de f es:

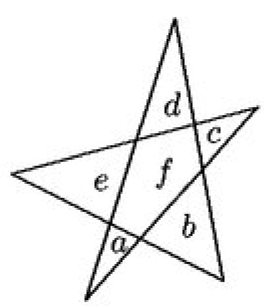


Figura 1.30:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 1.91 El círculo $\mathcal{C}$ de la figura 1.31 tiene centro O y su diámetro mide 3. Los segmentos AT y RS son diámetros perpendiculares del círculo. La recta $\mathcal{L}$ es tangente al círculo en el punto T; B es la intersección de la recta $\mathcal{L}$ con la recta AR. Calcular el área de la región sombreada (delimitada por los segmentos BR y BT y el arco de círculo RT.)

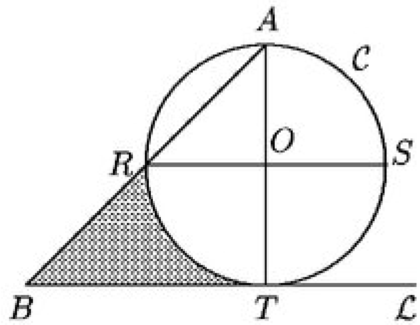


Figura 1.31:

(a) $3\pi/2 - 9/16$ (b) $2\pi/3$ (c) $9 - \pi/16$ (d) $\frac{3}{4\pi}$ (e) $27/8 - 9/16$

Problema 1.92 En la figura 1.32, ABC es un triángulo con $AB = AC$ y D un punto sobre CA con $BC = BD = DA$. El valor del ángulo $\angle ABD$ es:

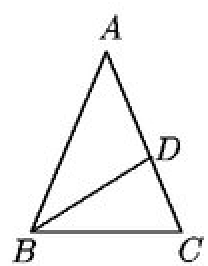


Figura 1.32:

(a) $30°$ (b) $36°$ (c) $40°$ (d) $45°$ (e) $60°$

Problema 1.93 En la figura 1.33, cada lado del cuadrado más pequeño mide 3 y cada lado del cuadrado más grande mide 6. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

(a) 6 (b) 10 (c) 12 (d) 18 (e) 24

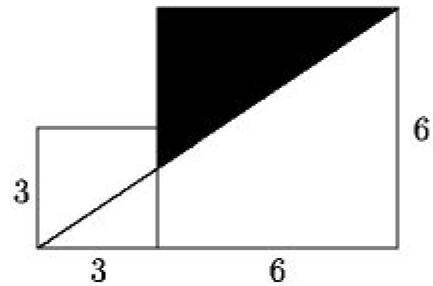


Figura 1.33:

Problema 1.94 Edgar y Raúl apostaron según las siguientes reglas: Van a lanzar un dado normal (con los números del 1 al 6 en sus caras) y una moneda (con los números 1 y 2 marcados en sus caras). Después multiplicarán el número que salga en el dado con el que salga en la moneda. Si el resultado es par gana Edgar, y si es impar gana Raúl. ¿Qué probabilidad de ganar tiene Edgar?

(a) 1/2 (b) 1/3 (c) 2/3 (d) 3/4 (e) 5/6

Problema 1.95 ¿En la figura 1.34, cuántas formas hay de llegar de A a B si no se puede pasar dos veces por el mismo punto?

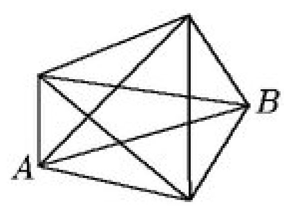


Figura 1.34:

(a) 10 (b) 12 (c) 16 (d) 18 (e) 20

Problema 1.96 Si $x^2 + y^2 = 6xy$, con $x \neq y$, ¿a qué es igual $(x + y)/(x - y)$?

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) 2 (e) $\sqrt{6}$

Problema 1.97 En un cuadrado $ABCD$ de lado 1 está inscrito un triángulo AEF de tal forma que E está sobre BC y F está sobre CD. Las longitudes de los lados AE y AF son iguales y son el doble de la longitud del lado EF. Calcular la longitud de EF.

(a) $\frac{\sqrt{30}-2}{7}$ (b) $\frac{\sqrt{38}}{7}$ (c) $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{7}$ (d) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ (e) $\sqrt{30}-\sqrt{2}$

Problema 1.98 En la figura 1.35, AB es el arco de un círculo centrado en C, BC es el arco de un círculo centrado en A, AC es el arco de un círculo centrado en B. Si la recta AB mide 1, ¿Cuál es el área de la figura?

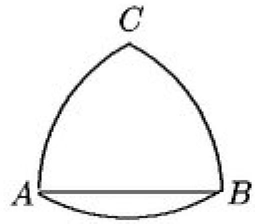


Figura 1.35:

(a) $2\sqrt{2}+\frac{5}{\sqrt{3}}$ (b) $3\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\pi(\sqrt{3}+5)$ (d) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ (e) $\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Problema 1.99 En la figura 1.36, ¿cuál es el área del triángulo ABC, si $AD = BD = DE$,$EF = 2AD$,$CF = 3AD$ y el área de $ADE = 1$?

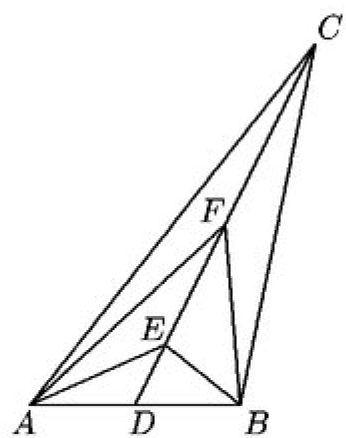


Figura 1.36:

(a) 4.5 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 12

Problema 1.100 Encontrar el valor de xyz donde x,y y z son números positivos que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 + \frac{1}{y} + z = 9$$
$$x^2 + \frac{1}{y} - z = 3$$
$$x^2 - \frac{1}{y} + z = 5$$

(a) 1/15 (b) 1/3 (c) 1/2 (d) 3 (e) 4

Problema 1.101 Para cada dos números enteros a y b se define la operación $*$ de la manera siguiente: $a * b = ab + 2$. ¿Cuál es el valor de $(\cdots((1*1)*1)*\cdots*1)*1$ donde se han utilizado mil unos?

(a) 1000 (b) 1001 (c) 1999 (d) 2001

Problema 1.102 ¿Cuántos números enteros hay entre 999^2 y 1000^2, sin incluir estos dos números?

(a) 999 (b) 1000 (c) 1998 (d) 1999

Problema 1.103 En un cuadrado $ABCD$ de lado 1, E es el punto medio de la diagonal BD y F el punto medio de ED. ¿Cuál es el área del triángulo CFD?

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{8}$

Problema 1.104 La suma de todos los dígitos del número $10^{99} - 99$ es:

(a) 873 (b) 874 (c) 879 (d) 899

Problema 1.105 En la figura 1.37 los lados grandes y chicos son todos iguales entre sí. Los lados chicos miden la mitad de los grandes. Todos los ángulos son rectos y el área de la figura es 200. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

(a) 20 (b) 40 (c) 60 (d) 80

Problema 1.106 En la figura 1.38, $ABCDEF$ es un hexágono regular y $\mathcal{C}$ es un círculo con centro en B. La razón del área sombreada entre el área del hexágono es:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{5}$

Problema 1.107 ¿Cuánto vale el ángulo x en la figura 1.39, si las rectas horizontales son paralelas?

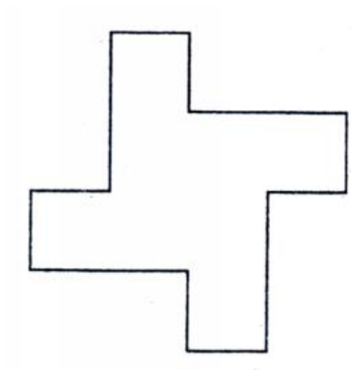


Figura 1.37:

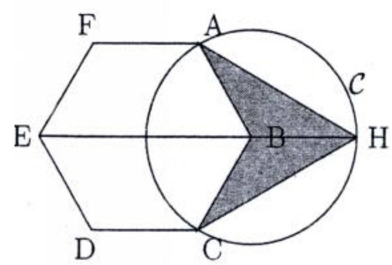


Figura 1.38:

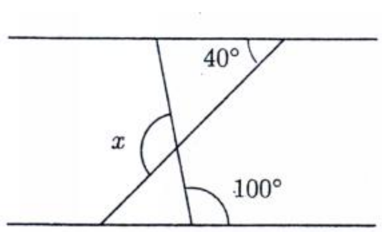


Figura 1.39:

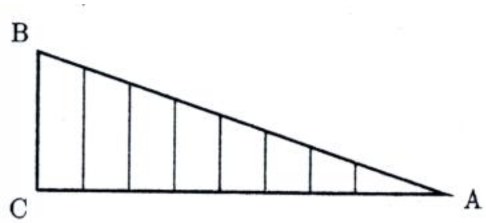


Figura 1.40:

(a) 120° (b) 130° (c) 140° (d) 150°

Problema 1.108 El lado AC de un triángulo ABC se divide en 8 partes iguales. Siete segmentos de recta paralelos a BC se dibujan desde los puntos de división, como se muestra en la figura 1.40. Si $BC = 10$, ¿Cuánto mide la suma de las longitudes de los 7 segmentos?

(a) 35 (b) 70 (c) 80 (d) 89

Problema 1.109 Con vértices en los puntos de la figura 1.41, ¿Cuántos cuadriláteros se pueden dibujar?

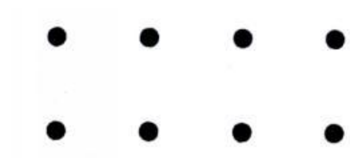


Figura 1.41:

(a) 4 (b) 16 (c) 24 (d) 36

Problema 1.110 Empiezas con el número 1. Una "operación" consiste en multiplicar el número por 3 y sumarle 5. ¿Cuál es la cifra de las unidades después de aplicar la operación 1999 veces?

(a) 1 (b) 2 (c) 8 (d) 9

Problema 1.111 Elena, en los primeros tres exámenes sacó 6, 7 y 9. ¿Cuánto tiene que sacar en el cuarto examen para sacar 8 de promedio entre los cuatro exámenes?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10

Problema 1.112 Considera una fila de 5 sillas numeradas del 1 al 5. Siéntate en la silla número 1. Un movimiento consta de pararte y sentarte en una de las sillas que tengas junto. Si estás en las silla 1 sólo puedes sentarte en la silla número 2, análogamente, si estás en la silla 5 sólo puedes sentarte en la silla 4, pero si estás en cualquier otra silla tienes dos posibilidades. Realiza 19 movimientos, luego elimina la silla 1 y 5 y finalmente haz 99 movimientos más. ¿En qué silla acabarás sentado?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) No se puede determinar

Problema 1.113 Cada movimiento en un juego consiste de invertir 2 flechas adyacentes, si la posición inicial es la de la figura 1.42 y la posición final es la de la figura 1.43 ¿Cuál es el número mínimo de movimientos para llegar a esta posición final?

Figura 1.42:

Figura 1.43:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 1.114 En la figura 1.44, la primera figura tiene 3 lados y 3 picos, la segunda tiene 12 lados y 6 picos, la tercera tiene 48 lados y 18 picos y así sucesivamente. ¿Cuántos picos tendrá la quinta figura?

Figura 1.44:

(a) 258 (b) 384 (c) 768 (d) 66

Problema 1.115 Se tiene un cubo de lado 5 formado por cubitos de lado 1. ¿Cuántos cubitos quedan totalmente ocultos a la vista?

(a) 25 (b) 27 (c) 10 (d) 15

Problema 1.116 En la figura 1.45, los círculos son tangentes (se tocan en un solo punto), todos los círculos son del mismo tamaño y tienen radio igual a 2. Encontrar el área de la región sombreada.

(a) 2π (b) 4π (c) 6π (d) 8π

Problema 1.117 Un cubo de madera se corta con una sierra por los puntos A, C y G, como se indica en la figura 1.46. ¿Cuánto vale el ángulo CAG?

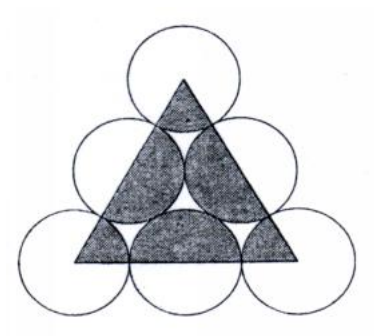


Figura 1.45:

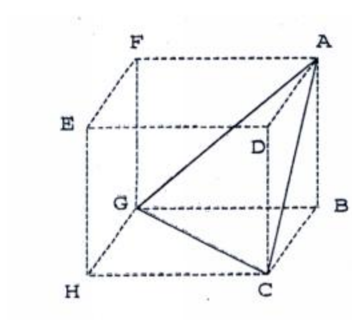


Figura 1.46:

(a) 45° (b) 90° (c) 60° (d) 30°

Problema 1.118 En el cubo de la figura 1.47, ¿de cuántas formas se puede ir de A a B sobre las aristas sin pasar dos veces por el mismo vértice y sin subir?

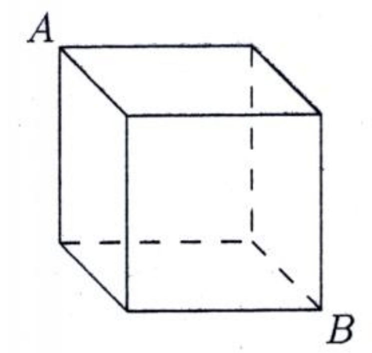


Figura 1.47:

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13

Problema 1.119 ¿Cuántos números enteros positivos n satisfacen la desigualdad $\frac{2}{5} < \frac{n}{17} < \frac{11}{13}$?

(a) 6 (b) 10 (c) 8 (d) 5

Problema 1.120 Si un cubo de arista igual a 5 se parte en cubos de arista igual a 1, entonces la suma de las longitudes de todas las aristas de todos los nuevos cubos es:

(a) 300 (b) 400 (c) 2000 (d) 1500

Problema 1.121 Sea ABCD un cuadrado con los lados de longitud 9. ¿Cuántos puntos (dentro o fuera del cuadrado) son equidistantes de B y C y están exactamente a una distancia 6 del punto A?

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) más de 5

Problema 1.122 ¿Cuánto mide la superficie de la figura 1.48, formada con cubos de lado 1?

(a) 18 (b) 16 (c) 14 (d) 12

Problema 1.123 Un cuadrado tiene perímetro P y área Q. Dada la ecuación $3P = 2Q$, determina el valor de P.

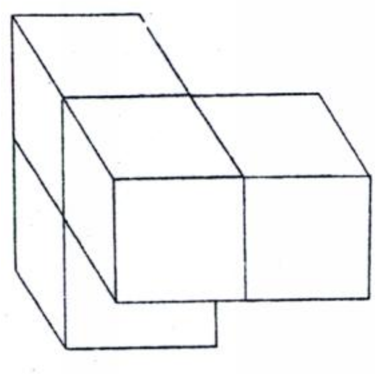


Figura 1.48:

(a) 10 (b) 12 (c) 24 (d) 36

Problema 1.124 El 70 % de los habitantes de un país habla un idioma y el 60 % de la misma población habla otro idioma. ¿Qué porcentaje de la población habla los 2 idiomas, sabiendo que cada habitante habla al menos uno de ellos?

(a) 70 % (b) 60 % (c) 30 % (d) 10 %

Problema 1.125 Dados dos números a y b definimos la operación § de la manera siguiente: $a \S b = a + b + ab$. El valor de $1 \S \frac{1}{2} \S \frac{1}{3} \S \cdots \S \frac{1}{1999}$ es:

(a) $\frac{1000}{1999}$ (b) 1999 (c) $1000 + \frac{1}{1999}$ (d) 2000

Problema 1.126 ¿Cuántos triángulos hay en la figura 1.49?

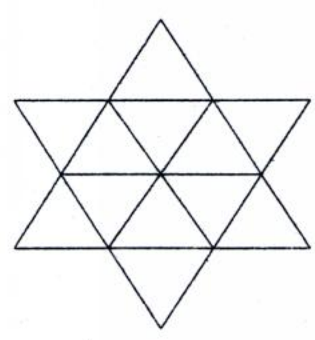


Figura 1.49:

(a) 22 (b) 20 (c) 18 (d) 14

Problema 1.127 En la figura 1.50, el triángulo ABC es equilátero y sus lados AC y BC son tangentes al círculo cuyo centro es O y cuyo radio es $\sqrt{3}$. El área del cuadrilátero $AOBC$ es:

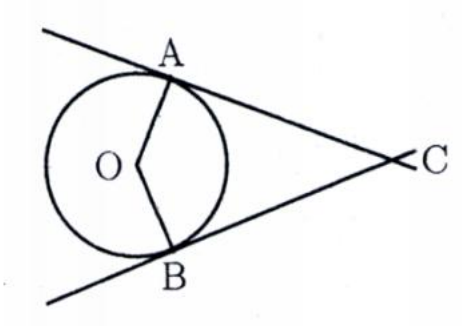


Figura 1.50:

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $\pi\sqrt{3}$ (c) 2π (d) $3\sqrt{3}$

Problema 1.128 ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación: $2^{3+x} + 2^{3-x} = 65$?

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

Problema 1.129 Los ángulos de un triángulo están en la razón 2 : 3 : 4, la suma de los dos ángulos menores es:

(a) 80° (b) 90° (c) 100° (d) 120°

Problema 1.130 Se tienen 9 ciudades y se quieren construir carreteras entre pares de ellas de tal froma que sea posible viajar entre cualesquiera dos de ellas. ¿Cuál es el mínimo número de carreteras que se deben construir?

(a) 8 (b) 9 (c) 18 (d) 36

Problema 1.131 Arregla los números 5, 7, 11, 13, 17 y 23 en los siete círculos de la figura 1.51, de tal manera que la suma de los tres números en cada línea sea el mismo número primo. ¿Qué número queda al centro?

(a) 7 (b) 11 (c) 13 (d) 17

Problema 1.132 Si $x^2 + 8x - 2 = 0$. ¿Qué número representa la expresión $x^4 + 8x + 16x + 10$?

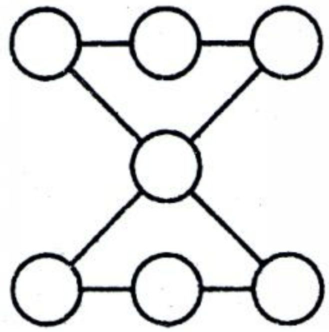


Figura 1.51:

(a) 0 (b) 8 (c) 10 (d) 14

Problema 1.133 Se tiene un cuadrado $ABCD$ de lado igual a 8 y se dibuja un círculo que pasa a través de los vértices A y D, y es tangente al lado BC. El radio del círculo es:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 8

Problema 1.134 Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres. Entonces decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuenta que le faltan 75 hombres. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

(a) 12357 (b) 3061 (c) 364 (d) 1557

Problema 1.135 ¿Cuál de las siguientes condiciones deben cumplir las medidas de los lados x y y de una parcela rectangular de perímetro fijo P de manera que la parcela tenga la mayor área posible?

(a) $x > y$ (b) $x = y$ (c) $x > P$ (d) $y < P$

Problema 1.136 Si $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, M es un punto sobre el segmento AB tal que AM es una cuarta parte de AB y P es la intersección de la diagonal DB y el segmento MC, ¿Cuánto mide PC?

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{21}{3}$ (d) $\frac{20}{3}$

Problema 1.137 Un hombre nació en el año x^2 y murió en el año y^2 (donde los números x, y son enteros positivos). Considera que murió en el día de su cumpleaños. Sabemos que vivió entre el año 1800 y el 2000. ¿Cuántos años vivió el hombre?

(a) 43 (b) 44 (c) 78 (d) 87

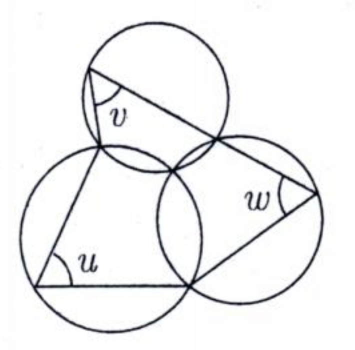


Figura 1.52:

Problema 1.138 ¿Cuánto vale la suma de $u + v + w$, en la figura 1.52?

(a) $3u$ (b) $180°$ (c) $360°$ (d) no se puede saber

Problema 1.139 Si $(6!)(7!) = n!$, ¿Cuánto vale n? $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n)$

(a) 10 (b) 12 (c) 13 (d) 42

Problema 1.140 Los niños A, B y C tomaron 13 dulces de una mesa, al final, A dijo: "tomé 2 dulces más que B", B dijo: "tomé la mitad de dulces que A y 5 menos que C", y finalmente C dijo: "tomé un número par de dulces". Si sabemos que a lo más uno de ellos mentía, ¿quien era este mentiroso?

(a) A (b) B (c) C (d) ninguno

Problema 1.141 En la figura 1.53, los segmentos AY y BX son perpendiculares a los segmentos BC y AC, respectivamente. Si el ángulo ABC mide $50°$ y el ángulo BAC mide $60°$. ¿Cuánto mide el ángulo BTY?

(a) $60°$ (b) $70°$ (c) $80°$ (d) $50°$

Problema 1.142 En la figura 1.54, ¿cuál es el área del triángulo ABC, si el área del hexágono regular es H?

(a) $\frac{H}{2}$ (b) $\frac{H}{4}$ (c) $\frac{H}{6}$ (d) $\frac{H}{8}$

Problema 1.143 Si $(1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{m}) = 1$ entonces m es igual a

(a) $n - 1$ (b) $n + 1$ (c) $2n$ (d) $\sqrt{n^2 + 1}$

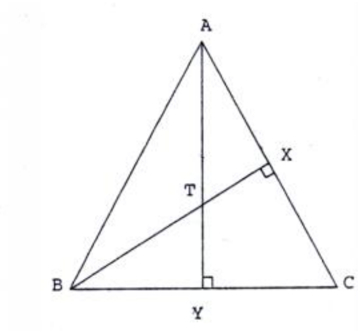


Figura 1.53:

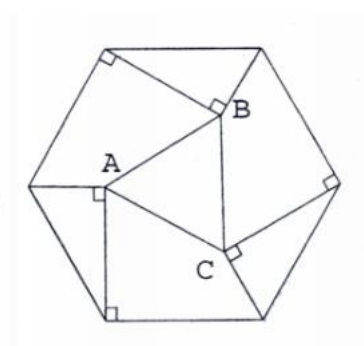


Figura 1.54:

Problema 1.144 ¿De cuántas maneras distintas pueden colorearse los lados de un triángulo equilátero con cuatro colores distintos, si suponemos que un mismo color se puede emplear en lados distintos y que dos coloraciones son iguales si difieren en un giro del triángulo en el plano?

(a) 4 (b) 20 (c) 24 (d) 16

Problema 1.145 En la figura 1.55 cada vértice puede tomar el valor 1 ó -1, ¿cuántos valores distintos puede tomar la suma $A + B + C + D + E + F + ABCDEF$?

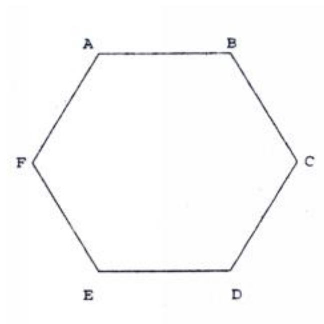


Figura 1.55:

(a) 14 (b) 8 (c) 7 (d) 4

Problema 1.146 La yerba en un prado crece con densidad y rapidez homogéneas. Sabiendo que 70 vacas consumen la yerba en 24 días y 30 vacas la comen en 60 días, ¿Cuántas vacas consumirán la yerba en 96 días?

(a) 16 (b) 18 (c) 20 (d) 22

Problema 1.147 Dado un punto cualquiera P en el interior de un triángulo equilátero de lado 6, consideremos las perpendiculares que van de P a cada uno de los lados del triángulo. Llamemos H_1, H_2 y H_3 a los pies de las perpendiculares mencionadas. ¿Cuánto vale $PH_1 + PH_2 + PH_3$?

(a) 2 (b) $3\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 4

Problema 1.148 Un estratega francés de la segunda Guerra Mundial tiene el siguiente problema. La distancia (en línea recta) de Chálons a Vitry es de 30 km. De Vitry a Chaumont 80 km, de Chaumont a St. Quetin 236 km, de St. Quetin a Reims 86 km, de Reims a Chálons de 40 km. ¿Cuál es la distancia en línea recta que hay entre Reims y Chaumont?

(a) 11 km (b) 120 km (c) 322 km (d) 150 km

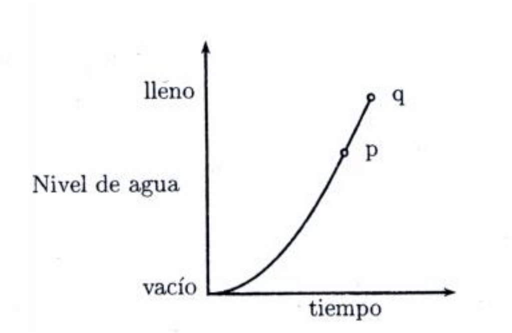
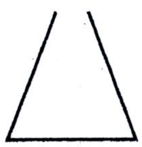
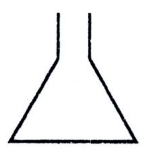
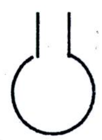
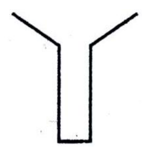


Figura 1.56:

Problema 1.149 Se llena un recipiente con agua, la cantidad de agua vertida a cada instante en la misma. La gráfica de la figura 1.56 muestra el nivel del agua en el recipiente durante el tiempo en que es llenado. El segmento PQ es una línea recta. La forma del recipiente que corresponde a la gráfica es:

(a)  (b)  (c)  (d) 

Problema 1.150 Si $ABCD$ es un trapecio de bases $AB = 8$ y $CD = 2$ y sus diagonales se cortan en E, la razón del área del trapecio entre el área del triángulo ABE es:

(a) 8 (b) 4 (c) $\frac{25}{16}$ (d) $\frac{16}{25}$

Problema 1.151 ¿Cuántos enteros hay tales que $22n \geq n^2 + 120$?

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

Problema 1.152 Si los números a, b, c satisfacen las igualdades: $1/a + 1/b + 1/c = 1$, $1/a - 1/b - 1/c = 1/3$, $1/a + 1/b - 1/c = 0$, entonces, $a + 2b + 3c$ es igual a:

(a) 6 (b) 12 (c) 18 (d) 24

Problema 1.153 Si a, b, c, d, y e son números positivos, tales que $ab = 1$, $bc = 2$, $cd = 3$, $de = 4$ y $ea = 5$, ¿Cuál es el valor de b?

(a) $\sqrt{\frac{3}{10}}$ (b) $\sqrt{\frac{8}{15}}$ (c) $\sqrt{\frac{40}{3}}$ (d) $\sqrt{30}$

Problema 1.154 Si las diagonales de un rombo difieren en 14 y sus lados miden 13, el área del rombo es:

(a) 156 (b) 120 (c) $28\sqrt{13}$ (d) $48\sqrt{3}$

Problema 1.155 Un contenedor de 5 litros se llena con jugo de naranja. Se le quitan 2 litros de jugo y se llena nuevamente con agua. Se mezcla muy bien y nuvemante se quitan 2 litros de mezcla y se vuelve a llenar con agua. ¿Qué porcentaje de jugo hay en la mezcla final?

(a) 24 % (b) 36 % (c) 30 % (d) 27 %

Problema 1.156 Los números de seis dígitos $ABCDEF$ donde los dígitos varían del 1 al 6 y son todos distintos, se llaman armoniosos si 1 divide a A, 2 divide a AB, 3 divide a ABC, 4 divide a $ABCD$, 5 divide a $ABCDE$ y 6 divide a $ABCDEF$. ¿Cuántos números armoniosos hay de 6 dígitos?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2

Problema 1.157 Si A y B son números naturales y $A/7 + B/5 = 31/35$ el valor de A es:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 1.158 En un triángulo equilátero XYZ se dividen los lados en tres partes iguales. Llamemos a las divisiones A, B, C, D, E y F como se muestra en la figura 1.57. ¿Cuál es el área de la figura sombreada, si el área del triángulo XYZ es 18?

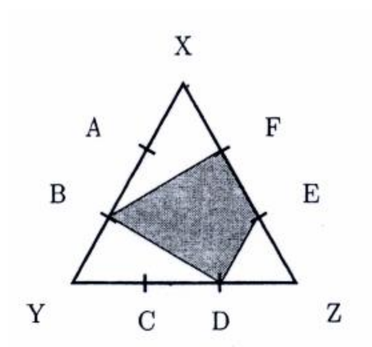


Figura 1.57:

(a) 12 (b) 10 (c) 9 (d) 8

Problema 1.159 ¿Cuál es el número de lados de un polígono que tiene el triple número de diagonales que de lados?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 12

Problema 1.160 Si n es un número entero, entonces $n^2(n^2-1)$ siempre es divisible entre:

(a) 5 (b) 8 (c) 12 (d) 14

Problema 1.161 Un cubo se formó con 12 pedazos de alambre de longitud 1. Una hormiga parte de uno de los vértices y camina a lo largo de los lados. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer antes de regresar al vértice de donde partió y sin recorrer un lado dos veces?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

Problema 1.162 Si $(a+1/a)^2 = 3$, entonces $a^3 + 1/a^3$ es igual a:

(a) 0 (b) $\sqrt{3}$ (c) 3 (d) $3\sqrt{3}$

Problema 1.163 Los lados de un triángulo son 2, 3, x. Si el área también es x, ¿cuánto vale x?

(a) $\sqrt{5}$ (b) 3 (c) 2 (d) 1

Problema 1.164 En un cubo de lado 2, M, N, P y Q son puntos medios de las aristas mostradas en la figura 1.58. ¿Cuál es la distancia máxima entre un punto de MN y otro de PQ?

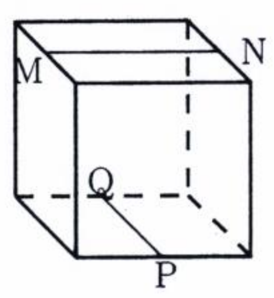


Figura 1.58:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (d) $\sqrt{6}$

Problema 1.165 *La zoo-lógica.* En la selva, la hiena miente los lunes, martes y miércoles; la zorra miente los jueves, viernes y sábados. En los días que no mienten, dicen la verdad. Un día se encontraron la hiena y la zorra y sostuvieron este diálogo:
Hiena: ¡Hola zorra! Ayer yo mentí,
Zorra: ¡Hola hiena! Yo también mentí ayer.
¿En qué día sucedió este encuentro?

(a) lunes (b) martes (c) jueves (d) nunca pudo suceder

Problema 1.166 Se tiene un tetraedro regular y en cada una de las caras se trazan todas las bisectrices. ¿Cuántos puntos de intersección hay entre las 12 bisectrices?

(a) 4 (b) 8 (c) 12 (d) 14

Problema 1.167 Sea $p(x) = x^3 + ax + 1$. Si $p(1) = 1$, ¿Cuál es el valor de $p(2)$?

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 7

Problema 1.168 El siguiente juego se efectúa entre dos jugadores: se colocan 13 fichas sobre la mesa y los jugadores tiran en forma alternada, cada tirada consiste en tomar 1, 2, 3 ó 4 fichas y gana el que se quede con la última ficha. ¿Cuántas fichas debe tomar el primer jugador en la primera tirada para asegurar su triunfo?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 1.169 ¿Para cuántos valores enteros positivos de n la expresión $\frac{18}{n+4}$ es un entero?

(a) 12 (b) 10 (c) 6 (d) 3

Problema 1.170 Si m y n son enteros tales que $2m - n = 3$, entonces $m - 2n$ es igual a:

(a) -3 (b) 0 (c) un múltiplo de 3 (d) cualquier entero

Problema 1.171 Una escalera tiene numerados los escalones como $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Una rana está en el escalón 0, salta cinco escalones hacia arriba hasta el escalón 5 y luego dos para abajo hasta el escalón 3, después sigue saltando alternando, cinco escalones para arriba y dos para abajo. La sucesión de escalones que pisa la rana es $0, 5, 3, 8, 6, \ldots$ ¿Cuál de los siguientes escalones no pisa la rana?

(a) 1997 (b) 1998 (c) 1999 (d) 2000

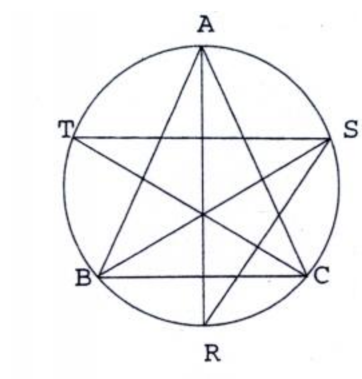


Figura 1.59:

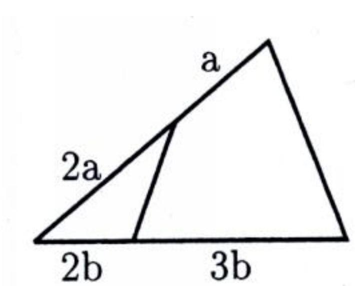


Figura 1.60:

Problema 1.172 Sea ABC un triángulo isóceles tal que $AB = AC$, sean R, S y T las intersecciones de las alturas de A, B y C, respectivamente, con el circuncírculo como se muestra en la figura 1.59. ¿Cuál es el valor del ángulo RST?

(a) $\frac{\angle A+\angle B}{2}$ (b) $\angle A$ (c) $\angle B$ (d) $\angle C$

Problema 1.173 En la figura 1.60 el área del triángulo chico es 8. El área del triángulo grande es:

(a) 20 (b) 24 (c) 28 (d) 30

Problema 1.174 Se forma un cono con un pedazo de papel semicircular, con radio de 10 (como se muestra en la figura 1.61). Encuentra la altura del cono.

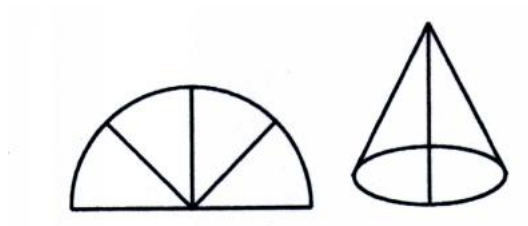


Figura 1.61:

(a) $5\sqrt{3}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) $\pi\sqrt{3}$ (d) $\pi\sqrt{5}$

Problema 1.175 En un cubo de lado 6 se inscribe un tetraedro regular de tal manera que los cuatro vértices de éste son también vértices del cubo. Calcula el volumen de dicho tetraedro.

(a) 36 (b) 72 (c) 75 (d) 108

Problema 1.176 La ecuación $(a + b + c)(a + b + c) = 3ab$ la satisfacen los lados a, b y c de un triángulo. ¿Cuál es la medida del ángulo opuesto al lado c?

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) imposible de determinar

Problema 1.177 De todos los números de 3 dígitos que son múltiplos de 3, ¿cuántos hay que tengan todos sus dígitos distintos de cero y distintos entre sí?

(a) 180 (b) 184 (c) 179 (d) 200

Problema 1.178 Cuántas veces aparece el factor 2 en las descomposición en primos de $1+2+3+...+10^{11}$?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11

Problema 1.179 De los números siguientes, el que tiene 81 divisores positivos es:

(a) $4 \times 9 \times 25 \times 49$ (b) 11^{81} (c) $2^9 \times 3^9$ (d) 81^{16}

Problema 1.180 Si $2^n - 1$ es un múltiplo de 7, entonces n es:

(a) par (b) impar (c) múltiplo de 3 (d) múltiplo de 6

Problema 1.181 Si a, b, c y d son dígitos tales que $d > c > b > a \geq 0$, ¿cuántos números de la forma $1a1b1c1d1$ son múltiplos de 33?

(a) 4 (b) 8 (c) 15 (d) 16

Problema 1.182 La sucesión creciente $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, 31, \ldots$ consiste de los enteros positivos que son potencia de 3 o suma de distintas potencias de 3. ¿Cuál es el número que está en el lugar 100?

(a) 729 (b) 810 (c) 917 (d) 981

Problema 1.183 Un punto P está fuera de un círculo, a una distancia 13 del centro. Una secante trazada desde P corta a la circunferencia en Q y R de tal manera que el segmento externo de la secante, PQ, mide 9 y QR mide 7. El radio del círculo es:

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Problema 1.184 En la figura 1.62, ABC es un triángulo equilátero, sus lados tienen longitud 3 y PA es paralela a BC. Si $PQ = QR = RS$, la longitud de CS es:

(a) $\sqrt{2}$ (b) 1 (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Problema 1.185 ¿Cuál es el máximo número de ángulos internos rectos que puede tener un octágono?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Problema 1.186 Se tiene que llenar la cuadrícula de la figura 1.63 con los números del 1 al 5, de tal forma que cada número aparezca únicamente una vez en cada columna y en cada renglón. ¿Cuál es el número que va en el centro de la cuadrícula?

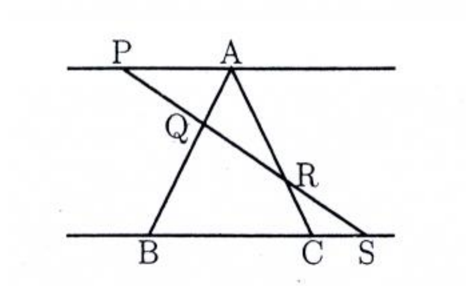


Figura 1.62:

3	4	1		5
2				
	2			3
1			5	
				4

Figura 1.63:

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5

Problema 1.187 Las raíces de la ecuación $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ son 1 y:

(a) $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$ (b) $\frac{a(b-c)}{c(a-b)}$ (c) $\frac{a(b-c)}{b(c-a)}$ (d) $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$

Problema 1.188 Llegan 4 niños a una fiesta y hay 6 gorros; 3 verdes y 3 rojos. A cada niño se le coloca su gorro respectivo con los ojos vendados y se sientan en una mesa circular de forma que cada niño ve los gorros de los otros tres. Empezando con el niño 1 y en sentido de las manecillas del reloj a cada niño se le hace la pregunta:"¿Sabes ya de qué color es tu gorro?" Y todos escuchan la respuesta hasta que alguien contesta afirmativamente. Además el primer niño dice que no. ¿Quién de estos niños es seguro que contestará afirmativamente?

(a) ninguno (b) el 2 (c) el 3 (d) el 4

Problema 1.189 Cien personas respondieron a un cuestionario formado por 3 preguntas. Cada pregunta debía contestarse, sí o no, y sólo una de estas respuestas era correcta. Si sabemos que:
8 personas contestaron bien las tres preguntas
9 personas contestaron bien sólo la primera y la segunda
11 personas contestaron bien sólo la primera y la tercera

6 personas contestaron bien sólo la segunda y la tercera
55 personas contestaron bien al menos la primera pregunta
32 personas contestaron bien al menos la segunda pregunta
49 personas contestaron bien al menos la tercera pregunta
¿Cuántas personas respondieron mal a todas las preguntas?

(a) 4 (b) 6 (c) 7 (d) 10

Problema 1.190 La expresión algebraica $x^2 + 9$ se escribe en la forma $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$. ¿Cuál es el valor de $a - b + c$?

(a) 9 (b) 10 (c) 12 (d) 13

Problema 1.191 ¿Para qué entero positivo n se satisface la ecuación

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+(2n)} = \frac{1999}{2000}$$

(a) 1998 (b) 1999 (c) 2000 (d) 2001

Problema 1.192 ¿Cuántos números se pueden representar como suma de algunos de los números 1, 2, 4, 8, 16 donde cada número se escoge a los más una vez? (Por ejemplo el 11 se puede representar como 8 + 2 + 1). Las sumas con un solo sumando están permitidas.

(a) 31 (b) 25 (c) 16 (d) 32

Problema 1.193 Si (a, b) denota al máximo común divisor de a y b, el valor de $(a^4 - b^4, a^2 - b^2)$ es:

(a) $a - b$ (b) $a + b$ (c) $a^2 - b^2$ (d) $a^2 + b^2$

Problema 1.194 ¿Cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden formar con los dígitos 1, 1, 2, 2, 3?

(a) 120 (b) 40 (c) 30 (d) 20

Problema 1.195 Considera 9 puntos sobre una circunferencia. ¿De cuántas maneras pueden ser divididos estos puntos en conjuntos de tres puntos, de tal manera que, ningún par de los triángulos determinados por estos subconjuntos se corten?

(a) 9 (b) 10 (c) 7 (d) 12

Problema 1.196 Considera 6 puntos sobre una circunferencia. ¿De cuántas maneras pueden ser estos puntos unidos por pares con 3 cuerdas que no se corten dentro del círculo?

(a) 10 (b) 12 (c) 8 (d) 5

Problema 1.197 Una mañana la Sra. Martínez, la Sra. Pérez, la Sra. Torres y la Sra. Gómez fueron de compras. Cada una de ellas tenía que ir a dos tiendas distintas. Una de las mujeres tenía que visitar la tlapalería, dos tenían que ir al banco, dos tenían que ir al carnicero y tres tenían que ir a la tienda de abarrotes. Sus compras se simplificaban por el hecho de que vivían en un pequeño poblado y únicamente había una tienda de cada cosa y únicamente había un banco. Si
1. Dora no fue a la tienda de abarrotes,
2. Tanto Esther como la Sra Gómez fueron al carnicero,
3. Margarita llegó a casa con más dinero que cuando se fue,
4. La Sra. Pérez no fue a ninguno de los lugares donde estuvieron Lucía y la Sra. Torres
¿Cuál es el apellido de Margarita?

(a) Torres (b) Gómez (c) Martínez (d) Pérez

Problema 1.198 El número de soluciones de la ecuación $3x+y+z=23$ donde x, y y z son enteros positivos es:

(a) 56 (b) 70 (c) 86 (d) 92

Problema 1.199 En una clase hay 25 alumnos. Entre ellos 17 alumnos son ciclistas, 13 nadadores y 8 esquiadores. Ningún alumno practica los tres deportes. Los ciclistas, nadadores y esquiadores se sacaron 9 en matemáticas. Seis alumnos en la clase se sacaron 6 en matemáticas. ¿Cuántos nadadores saben esquiar?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 10

Problema 1.200 Considera el menor entero positivo que al dividirlo entre 10 deja residuo 9, al dividirlo entre 9 deja residuo 8, al dividirlo entre 8 deja residuo 7, etc., hasta que al dividirlo entre 2 deja residuo 1. Al dividirlo entre 11 deja residuo:

(a) 0 (b) 3 (c) 5 (d) 7

Capítulo 2

Combinatoria

2.1. Principios básicos de conteo

Cada rama de las matemáticas se caracteriza por estudiar un cierto tipo de objetos, o por contestar cierta clase de preguntas. La combinatoria busca responder las preguntas del tipo: ¿de cuántas formas...? Por ejemplo: ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B? ¿Cuántos números de 6 dígitos son tales que sus cifras suman 21?, etc.

Lo mejor para tomar familiaridad con un tema es hacer problemas de éste. Así, comencemos con algunos.

Problema 2.1 Hay cinco distintos tipos de tazas y tres de platos en una tienda. ¿De cuántas maneras se puede comprar una taza y un plato?

Solución. Primero, elijamos una taza. Luego, para completar, podemos elegir cualquiera de los tres platos. Entonces tenemos 3 diferentes opciones que incluyen a la taza elegida. Como hay cinco tazas, tenemos $3 \times 5 = 15$ opciones.

Problema 2.2 En la tienda del problema anterior hay además 4 diferentes tipos de cucharas. ¿Cuántas maneras hay de comprar una taza, un plato y una cuchara?

Solución. Comencemos con cualquiera de las 15 opciones del problema anterior. Hay cuatro maneras diferentes de completarla con una cuchara. Entonces, el número total de opciones es $60 = 15 \times 4 = 5 \times 3 \times 4$.

Problema 2.3 En el país de las maravillas hay tres pueblos: A, B y C. Existen seis caminos de A a B, y cuatro de B a C. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta C?

Solución. $24 = 6 \times 4$.

Estos tres problemas ilustran lo que llamamos el **principio multiplicativo**: cuando una elección se realiza consecuentemente, es decir tenemos que elegir una cosa **y** luego otra para completar (el recorrido en el caso del viaje, por ejemplo), el total de formas es el producto de las posibilidades para cada opción.

El siguiente problema ilustra una idea diferente:

Problema 2.4 En el país de las maravillas se construyó un nuevo pueblo, llamado D, y se construyeron también 3 caminos de A a D y 2 de D a C. ¿Cuántas formas hay ahora para ir de A a C?

Solución. Hay dos posibilidades: nuestra ruta pasa por B o por D, pero no por ambos. En cada caso es fácil calcular el número de formas distintas (usando la idea anterior). Pasando por B, hay $24 = 6 \times 4$ opciones, y por C hay $6 = 3 \times 2$ opciones. Para obtener el total, sencillamente sumamos los resultados parciales y obtenemos $30 = 24 + 6$.

Dividir el problema en casos es una idea muy útil. Por ejemplo, ayuda en la resolución del siguiente problema:

Problema 2.5 Volvemos a la tienda que tiene cinco distintos tipos de tazas, tres de platos y cuatro de cucharas. ¿De cuántas maneras se pueden comorar dos cosas con nombres ditintos?

Estos problemas ilustran lo que llamamos el **principio aditivo**: cuando una elección se puede hacer de una manera **o** de otra (como en nuestro ejemplo, pasar por B o por D), el total de formas es la suma de las posibilidades para cada opción.

A continuación presentamos una lista de problemas para resolver usando las ideas previas.

Problema 2.6 Decimos que un número es simpático si todos sus dígitos son impares. ¿Cuántos números simpáticos de seis cifras hay?

Problema 2.7 Arrojamos una moneda 3 veces. ¿Cuántas secuencias diferentes de "águila" y "sello"podemos obtener?

Problema 2.8 Cada cuadro en una cuadrícula de 2×2 puede ser coloreado de blanco o de negro. ¿Cuántas coloraciones diferentes de la cuadrícula existen?

Problema 2.9 ¿Cuántas maneras diferentes hay de llenar una planilla de pronósticos deportivos? (En la planilla uno debe predecir los resultados de 13 juegos de futbol, indicando ya sea la victoria para alguno de los dos equipos, o un empate).

Problema 2.10 El alfabeto *hermitiano* consiste únicamente de tres letras: A, B y C. Una palabra en este lenguaje es una secuencia arbitraria de no más de cuatro letras. ¿Cuántas palabras diferentes existen en este lenguaje?

Continuemos con otros problemas que nos ilustrarán otras estrategias distintas.

Problema 2.11 En un equipo de futbol con 11 integrantes se deben elegir un capitán titular y un capitán suplente. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?

Solución. Cualquiera de los 11 jugadores puede ser elegido como capitán titular. Después, cualquiera de los 10 jugadores restantes puede ser elegido como capitán suplente. Entences, tenemos $11 \times 10 = 110$ maneras de hacer la elección.

Este problema difiere de los anteriores en que la primera elección (la del capitán titular) afecta a la segunda (la del capitán titular) porque una misma persona no puede ser ambas cosas a la vez. Seguimos con algunos problemas más en la misma dirección.

Problema 2.12 ¿Cuántas maneras distintas hay de fabricar una bandera tricolor con tres tiras horizontales del mismo tamaño, si tenemos seis de esas tiras de colores distintos? Podemos distinguir la parte de arriba de la bandera de la de abajo.

Problema 2.13 ¿Cuántas maneras distintas hay de colocar una torre blanca y una negra en un tablero de ajedrez de modo que no se ataquen entre sí?

Problema 2.14 ¿Cuántas maneras distintas hay de colocar un rey blanco y uno negro en un tablero de ajedrez de modo que no se ataquen entre sí?

Calculemos ahora el número de maneras de ordenar n objetos en línea. Tales arreglos son llamados *permutaciones*, y juegan un papel significativo en combinatoria y en álgebra. Pero primero hagamos una pequeña definición:

Si n es un número natural, entonces $n!$ (que se lee "ene factorial") es el producto

$$n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1)$$

Volvamos con las permutaciones.

Problema 2.15 ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar usando los dígitos 1, 2 y 3 (sin repeticiones) en algún orden?

Solución. Hagámoslo como el problema 2.11: el primer dígito puede ser cualquiera de los tres dados, el segundo cualquiera de los dos restantes y el tercero debe ser el único sobrante. Entonces tenemos $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ números distintos.

Problema 2.16 ¿Cuántas maneras hay de ordenar en una línea cuatro pelotas, de las cuales una es roja, una negra, una azul y una verde?

Solución. El primer lugar puede ser ocupado por cualquiera de las cuatro pelotas. El segundo puede ser ocupado por cualquiera de las tres restantes, y así sucesivamente. Finalmente, la respuesta es (de modo semejante al problema 2.15) $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$.

Análogamente podemos probar que n objetos diferentes pueden ser ordenados uno detrás de otro de $n(n-1)(n-2)...(2)(1)$ formas, es decir,

El número de permutaciones de n objetos es $n!$

Una vez observado esto, podemos extender la definición de factorial al 0, pues el número 0! tiene una interpretación natural: sólo hay una manera de ordenar 0 objetos (que consiste en no hacer nada), y por lo tanto $0! = 1$.

Por conveniencia para la notación, introducimos la siguiente convención. Cualquier secuencia (finita) de letras del alfabeto español será llamada una *palabra* (sin importar si es posible o no encontrarla en un diccionario). Por ejemplo, podemos formar seis palabras usando las letras A, B y C cada una exactamente una vez: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA. En los siguientes cinco problemas se debe calcular el número de diferentes palabras (en el sentido acordado) que se pueden obtener reacomodando las letras de una palabra en particular.

Problema 2.17 "VECTOR"

Solución. Como todas las letras de la palabra son diferentes, la respuesta es $6! = 720$ palabras.

Problema 2.18 "MONOS"

Solución. Esta palabra contiene dos letras O, y las otras son diferentes. Imaginemos temporalmente que las dos letras O son dos letras distintas O_1 y O_2. Bajo esta diferencia tendríamos $5! = 120$ diferentes palabras. Sin embargo, cualesquiera dos palabras que puedan ser obtenidas cada una de la otra al intercambiar las letras O_1 y O_2 (por ejemplo, NO_1MSO_2 y NO_2MSO_1) son, de hecho, la misma, dado que ambas letras son en realidad la misma. Entonces, nuestras 120 palabras se dividen en parejas de palabras iguales. Esto significa que la respuesta buscada es $120/2 = 60$ palabras.

Problema 2.19 "CAMADA"

Solución. Si pensamos en las tres letras A como tres letras diferentes A_1, A_2 y A_3, obtenemos 8! palabras diferentes. Sin embargo, cualesquiera palabras que pueden ser obtenidas una de la otra reacomodando las letras A_i son idénticas. Como las letras A_i pueden ser reacomodadas en sus lugares en 3! formas, las 8! palabras en total se dividen en grupos de 3! palabras iguales. Entonces la respuesta es $8!/3!$.

Problema 2.20 "CERRADURA"

Solución. Tenemos 3 letras R y 2 letras A en esta palabra. Pensando temporalmente en ellas como letras distintas obtenemos 9! palabras. Recordando que las letras A son iguales el número de palabras se reduce a $9! \;/\; 2!$. Entonces, recordando que las letras R también son iguales, llegamos a la respuesta final: $9!/(2! \times 3!)$.

Problema 2.21 "CARACTERIZACIÓN"

Solución. $15!/(3! \times 3! \times 2! \times 2!)$.

Estos problemas acerca de palabras muestran una idea muy importante e interesante: la del conteo múltiple. Esto es, en vez de contar el número de objetos en los que estamos interesados, puede ser más fácil contar otros objetos cuya cantidad es un múltiplo conocido del número de objetos que estamos buscando (generalmente, se trata, como en los ejemplos anteriores, de contar cada uno de los objetos que buscamos varias veces, y luego dividir entre el número de veces que contamos cada objeto).

He aquí más problemas para resolver usando este método.

Problema 2.22 Hay 20 pueblos en un cierto país, y cada par de ellos está conectado por una carretera directa (es decir, que no pasa por ningún otro pueblo). ¿Cuántas carreteras hay?

Problema 2.23 ¿Cuántas diagonales hay en un n-ágono? (Entendemos por diagonal cualquier segmento que una dos vértices no consecutivos).

Problema 2.24 Entenderemos por "collar" una cadena circular con varias cuentas en ella. Se permite rotarlo pero no voltearlo (es decir, si lo tenemos sobre una mesa, que la parte que toca la mesa se vuelva la de arriba). ¿Cuántos collares diferentes se pueden hacer usando 13 cuentas distintas?

Problema 2.25 Repetir el problema anterior, pero ahora con la condición de que sí podemos voltearlo.

El siguiente problema ilustra otra importante idea combinatoria.

Problema 2.26 ¿Cuántos números de seis dígitos tienen al menos un dígito par?

Solución. En vez de contar los números de seis dígitos con al menos un dígito par, contemos los números de seis dígitos que no tienen esa propiedad. Como estos son exactamente los números cuyos dígitos son todos impares, hay $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6 = 15625$ de ellos. Como en total hay $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900000$ números de seis dígitos, concluimos que la cantidad de números de seis dígitos con al menos un dígito par es $900000 - 15625 = 884375$.

La idea principal en esta solución fue usar el método del complemento, es decir, contar (o considerar) los objetos "no pedidos" en vez de los "pedidos", lo cual es más fácil en ciertos casos. He aquí otro problema que puede ser resuelto usando este método.

Problema 2.27 Hay seis letras en el lenguaje *hermitiano*. Una palabra es cualquier secuencia de seis letras entre las cuales hay (al menos) dos iguales. ¿Cuántas palabras distintas hay en este lenguaje?

A continuación se presenta una lista de problemas diversos para ser resueltos utilizando las estrategias aprendidas.

Problema 2.28 En una oficina postal hay cinco tipos de sobres y 4 tipos de estampillas. ¿De cuántas formas puedes comprar un sobre y una estampilla?

Problema 2.29 ¿De cuántas formas puedes elegir una vocal y una consonante de la palabra "olimpiada"?

Problema 2.30 Siete sustantivos, cinco verbos y dos adjetivos son escritos en el pizarrón. Podemos formar una oración eligiendo una palabra de cada tipo y no nos importa el sentido que tenga la oración. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

Problema 2.31 Cada uno de dos coleccionistas tiene 20 estampas y 10 postales. Decimos que un intercambio es justo si ellos intercambian una estampa por una estampa o una postal por una postal. ¿De cuántas formas podemos hacer un intercambio justo entre los dos coleccionistas?

Problema 2.32 ¿Cuántos números de seis dígitos tienen todos sus dígitos de la misma paridad (todos impares o todos pares)?

Problema 2.33 ¿De cuántas formas podemos enviar seis cartas urgentes si tenemos tres mensajeros y cada carta puede dársele a cualquiera de los mensajeros?

Problema 2.34 ¿De cuántas maneras podemos elegir cuatro cartas de diferentes palos de una baraja común de 52 cartas?

Problema 2.35 ¿De cuántas formas podemos acomodar todos o algunos de cinco libros en un librero?

Problema 2.36 ¿De cuántas formas podemos acomodar ocho torres en un tablero de ajedrez de tal forma que ninguna ataque a las otras?

Problema 2.37 Hay n hombres y n mujeres en una clase de baile. ¿De cuántas formas podemos acomodarlos por parejas (un hombre con una mujer) para la clase?

Problema 2.38 Las reglas de un torneo de ajedrez dicen que cada concursante debe jugar con todo otro concursante exactamente una vez. ¿Cuántos juegos se jugarán si hay 18 jugadores?

Problema 2.39 ¿De cuántas formas puedes poner:
a) dos alfiles
b) dos caballos
c) dos reinas
en un tablero de ajedrez de tal forma que una pieza no ataque a la otra?

Problema 2.40 Hay tres cuartos en un dormitorio: uno sencillo, uno doble y uno cuádruple. ¿De cuántas formas se pueden acomodar siete estudiantes en el dormitorio?

Problema 2.41 Una madre tiene dos manzanas, tres peras y cuatro naranjas. Cada mañana por nueve días ella da una fruta a su hijo. ¿De cuántas formas puede hacer esto?

Problema 2.42 ¿De cuántas formas se puede poner el conjunto de las piezas de ajedrez en la primera fila del tablero? (recuerda que son un rey, una reina, dos torres idénticas, dos caballos idénticos y dos alfiles idénticos).

Problema 2.43 ¿Cuántas palabras se pueden crear usando exactamente cinco letras A y no más de tres letras B?

Problema 2.44 ¿Cuántos números de diez dígitos tienen al menos dos dígitos iguales?

Problema 2.45 ¿Será cierto que los números de siete dígitos sin dígitos 1 en su representación decimal constituyen más del 50 % de todos los números de siete dígitos?

Problema 2.46 Se arroja un dado tres veces. De entre todos los posibles resultados, ¿cuántos tienen al menos una ocurrencia del seis?

Problema 2.47 ¿De cuántas formas se pueden dividir 14 personas en 7 parejas?

Problema 2.48 ¿Cuántos números de nueve dígitos tienen suma par de sus dígitos?

2.2. Combinaciones

Comencemos con un problema sencillo:

Problema 2.49 Se deben elegir dos estudiantes de entre un grupo de treinta para un concurso de matemáticas. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Solución. El primer participante puede ser elegido de 30 maneras. Sin importar quién fue el primer elegido, el segundo puede ser seleccionado de 29 maneras. Pero cada pareja está siendo contada exactamente dos veces, de manera que la respuesta es $30 \times 29/2 = 435$ maneras. Hay que notar que esta solución es básicamente igual a la del problema 2.22.

Supongamos ahora que debemos elegir un equipo no de dos sino de k integrantes, y que el total de estudiantes no es 30 sino n. El número de formas en que se puede realizar la elección es llamado *el número de combinaciones de k elementos tomados de entre n elementos*, y es denotado por el símbolo $\binom{n}{k}$ (que se lee "combinaciones de n en k", o bien, simplemente "n en k").

Por ejemplo, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$. Notemos que $\binom{n}{0}$ también puede ser interpretado naturalmente: sólo hay una manera de elegir 0 personas de entre n. Esto es, $\binom{n}{0} = 1$ para todo n.

Es importante hacer notar que algunas de las propiedades de las combinaciones pueden ser probadas mediante un simple razonamiento combinatorio, sin usar una fórmula para calcular $\binom{n}{k}$.

Propiedad 1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Demostración. Observemos que elegir a k participantes para el concurso es equivalente a elegir a $n-k$ estudiantes que no participarán en el concurso. Por lo tanto, el número de maneras de elegir a k personas de entre n es igual al número de maneras de elegir a $n-k$ personas de entre n, es decir, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Propiedad 2. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Demostración. Supongamos que hay $n+1$ estudiantes en el grupo. Fijémonos en alguno de ellos, el que sea, y denotémoslo(a) por A. Cada equipo que podemos elegir es de uno de dos tipos: o bien contiene a A, o no lo contiene. El número de formas de elegir equipos del primer tipo es $\binom{n}{k-1}$, puesto que como A debe estar en el equipo, sólo quedan n estudiantes de entre los cuales elegir a los otros $k-1$ miembros del equipo. Por otro lado, la cantidad de maneras de elegir equipos del segundo tipo es $\binom{n}{k}$, puesto que como A no puede estar en el equipo, debemos elegir a los k elementos del equipo de entre los otros n estudiantes. Por lo tanto, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Ahora encontremos una fórmula para calcular $\binom{n}{k}$.

Problema 2.50 ¿Cuántas maneras hay de elegir un equipo de 3 estudiantes de entre un total de 30?

Solución. El primer estudiante puede ser elegido de 30 maneras, el segundo de 29 y el tercero de 28. Entonces tenemos $30 \times 29 \times 28$ maneras. Sin embargo, cada equipo está siendo contado varias veces: el equipo (A, B, C) es el mismo que el equipo (C, A, B). Como el número de permutaciones de tres elementos es 3!, cada equipo está siendo contado $3! = 6$ veces. Por lo tanto, $\binom{30}{3} = 30 \times 29 \times 28/6$.

De exactamente el mismo modo podemos deducir la fórmula para calcular $\binom{n}{k}$ para n y k arbitrarios:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Resolvamos algunos problemas más:

Problema 2.51 ¿De cuántas maneras se pueden elegir cuatro colores de entre 7 colores dados?

Respuesta. $\binom{7}{4} = 35$.

Problema 2.52 Un estudiante tiene 6 libros de matemáticas, y otro tiene 8. ¿Cuántas maneras hay de intercambiar 3 libros del primer estudiante por 3 del otro?

Solución. El primer estudiante puede elegir sus 3 libros de $\binom{6}{3}$ maneras, y el segundo puede hacer lo propio de $\binom{8}{3}$ formas. Entonces, el número de posibles intercambios es $\binom{6}{3} \times \binom{8}{3} = 1120$.

Problema 2.53 Hay dos mujeres y 7 hombres en un club de ajedrez. Debe elegirse un equipo de 4 personas para un torneo, el cual debe incluir por lo menos a una mujer. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Solución. Puede haber 1 o 2 mujeres en el equipo. Si hay 2, los 2 hombres que faltan para completar el equipo pueden ser elegidos de $\binom{7}{2}$ formas. Si sólo hay una mujer en el equipo, ésta puede ser elegida de dos maneras, y en cualquier caso hay $\binom{7}{3}$ formas de elegir a los 3 hombres que faltan para completar el equipo. Por lo tanto, en total hay $\binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{7}{3} = 91$ maneras de elegir el equipo.

Problema 2.54 ¿Cuántas maneras hay de dividir a un grupo de 10 personas en dos equipos de basquetbol de 5 personas cada uno?

Solución. El primer equipo puede ser elegido de $\binom{10}{5}$ maneras. Una vez que elegimos al primer equipo, el segundo queda determinado automáticamente. Sin embargo, este cálculo cuenta cada par de equipos complementarios, digamos A y B, dos veces: cuando A es elegido primero y cuando B es elegido primero. entonces, la respuesta es $\binom{10}{5}/2$.

Nota. No es obligatorio calcular explícitamente la expansión decimal de las respuestas. En éstas pueden aparecer expresiones como $\binom{n}{k}$ o $n!$

Observemos que a pesar de que ya encontramos una fórmula para $\binom{n}{k}$, la propiedad 1 (es decir, que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$) no es clara a partir de la fórmula. Sin embargo, podemos cambiar la fórmula a una forma más simétrica usando el viejo truco de multiplicar por 1, es decir, multiplicando el numerador y el denominador por $(n-k)!$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)\dots(2)(1)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

De donde la propiedad 1 resulta evidente.

Ejercicio. Probar la propiedad 2 usando la fórmula recién encontrada.

Problema 2.55 Diez puntos están marcados en el plano de tal manera que no hay tres colineales (es decir, no hay tres de ellos que estén sobre la misma línea recta). ¿Cuántos triángulos hay con vértices en estos puntos?

Problema 2.56 Un escuadrón especial consiste de 3 oficiales, 6 sargentos y 60 soldados rasos. ¿De cuántas maneras se puede elegir a un grupo de 1 oficial, 2 sargentos y 20 soldados rasos para una misión?

Problema 2.57 Diez puntos están marcados en una línea recta, y 11 puntos están marcados sobre otra línea recta paralela a la primera. ¿Cuántos:

a) triángulos
b) cuadriláteros
hay con vértices en estos puntos?

Problema 2.58 Se tiene un conjunto de 15 palabras distintas. ¿De cuántas maneras se puede elegir un subconjunto de no más de 5 palabras?

Problema 2.59 Hay 4 parejas casadas en un club. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 personas de tal manera que no haya un matrimonio incluido en el comité?

Problema 2.60 Hay 31 estudiantes en una clase, incluyendo a Pedro y a Juan. ¿Cuántas maneras hay de elegir un equipo de futbol (11 jugadores), de tal manera que Pedro y Juan no estén juntos en el equipo?

Problema 2.61 ¿De cuántas maneras se pueden reacomodar las letras de la palabra "HUMANOS" de tal manera que tanto las vocales como las consonantes estén en orden alfabético entre sí? Ejemplo: HAOMNUS (A-O-U, H-M-N-S).

Problema 2.62 Debemos elegir un equipo de 5 personas de entre 12 niñas y 10 niños. ¿Cuántas maneras hay de hacerlo de tal forma que no haya más de 3 niños en el equipo?

Problema 2.63 ¿Cuántas maneras hay de colocar 12 damas blancas y 12 damas negras en los cuadros negros de un tablero de ajedrez?

Problema 2.64 a) ¿Cuántas maneras hay de dividir a 15 personas en tres equipos de 5 personas cada uno?
b) ¿Cuántas maneras hay de elegir dos equipos de 5 personas cada uno de entre 15 personas?

Problema 2.65 ¿De cuántas formas puedes elegir 10 cartas de una baraja de 52 cartas de modo que:
a) haya exactamente un as entre las cartas elegidas?
b) haya por lo menos un as entre las cartas elegidas?

Problema 2.66 ¿Cuántos números de seis cifras tienen 3 dígitos pares y 3 impares?

Problema 2.67 ¿Cuántos números de 10 cifras tienen la suma de sus cifras igual a: a) 2; b) 3; c) 4?

Problema 2.68 Una persona tiene 6 amigos. Cada noche, durante 5 días, invita a cenar a un grupo de 3 de ellos de modo que el mismo grupo no es invitado dos veces. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?

Problema 2.69 Para participar en cierta lotería en Rusia, uno debe elegir 6 números de entre 45 impresos en una tarjeta (todas las tarjetas son idénticas).
a) ¿Cuántas maneras de elegir los 6 números hay?
b) Después de realizado el sorteo, los organizadores de la lotería decidieron contar el número de

maneras que hay de elegir los 6 números de tal manera que exactamente 3 de los 6 números elegidos estén entre los números de la combinación ganadora. Ayúdalos a encontrar la respuesta.

2.3. Separadores

Continuemos ahora con un par de problemas interesantes. Cada uno de ellos puede ser resuelto mediante cálculos directos, aunque un tanto complejos (intenta hacerlo de este modo también, pero después, para comparar). Sin embargo, simplemente reformular la pregunta nos permite encontrar la respuesta (que en ambos casos es un número de combinaciones), de manera bastante fácil.

Problema 2.70 Seis cajas están numeradas del 1 al 6. ¿De cuántas formas se pueden repartir 20 pelotas idénticas entre las cajas de tal manera que ninguna de ellas quede vacía?

Solución. Acomodemos las pelotas en una hilera. Para determinar la distribución de las pelotas en las cajas debemos dividir esta hilera en seis grupos de pelotas usando cinco separadores: el primer grupo para la primera caja, el segundo para la segunda y así sucesivamente. Entonces, el número de formas de distibuir las pelotas entre las cajas es igual al número de maneras de poner cinco separadores en los huecos entre las pelotas. Cada separador puede ser colocado en cualquiera de los 19 huecos (hay $20 - 1 = 19$ huecos entre 20 pelotas), y no podemos poner dos separadores en el mismo hueco, pues eso significaría que una de las cajas quedaría vacía. Por lo tanto, el número total de distribuciones posibles es $\binom{19}{5}$.

Ejercicio. ¿Cuántas maneras hay de distribuir n pelotas idénticas en m cajas numeradas de tal modo que ninguna de las cajas quede vacía?

Problema 2.71 Seis cajas están numeradas del 1 al 6. ¿De cuántas formas se pueden repartir 20 pelotas idénticas entre las cajas (esta vez algunas de las cajas pueden quedar vacías)?

Solución. Consideremos una hilera de 25 objetos: 20 pelotas idénticas y 5 separadores idénticos, y consideremos todas sus posibles permutaciones. Cada forma de acomodarlos corresponde a una manera de distribuir las pelotas en las cajas: las pelotas colocadas a la izquierda del primer separador van en la primera caja, las pelotas colocadas entre el primer y el segundo separadores van en la segunda caja y así sucesivamente (hay que notar que las cajas pueden quedar vacías, pues dos separadores pueden quedar juntos, o alguno de ellos al principio o al final). Por lo tanto, el número de formas de repartir las pelotas entre las cajas es igual al número de formas de elegir los 5 lugares para colocar los separadores de entre los 25 lugares disponibles para las pelotas y los separadores, es decir, $\binom{25}{5}$.

Hay que observar que el problema 2.70 también puede ser resuelto como sigue: pongamos una pelota en cada una de las cajas (para evitar que alguna quede vacía), y luego usemos la solución del problema 23 con las 14 pelotas que quedan, lo cual una vez más nos da el resultado $\binom{14+5}{5} = \binom{19}{5}$.

Las ideas usadas para resolver estos dos problemas nos sirven para resolver el siguiente, que en apariencia es bastante complicado:

Problema 2.72 ¿De cuántas formas se puede representar al número natural n como la suma de:
a) k números naturales?
b) k enteros no negativos?
Nota: Representaciones que difieren en el orden de los sumandos son consideradas diferentes.

Sugerencia. Representa a n como suma de n unos: $n = 1 + 1 + \cdots + 1$. Considera a los unos como las pelotas y a los k sumandos como las cajas. Las respuestas son: a) $\binom{n-1}{k-1}$; b) $\binom{n+k-1}{n}$.

Problema 2.73 ¿De cuántas formas puedes distribuir 12 monedas de un peso en los 5 bolsillos de tu pantalón de tal forma que ninguno quede vacío?

Problema 2.74 12 libros idénticos deben ser forrados usando forros de color rojo, verde o azul ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Problema 2.75 ¿De cuántas formas se puede dividir un collar circular hecho con 30 perlas idénticas en 8 pedazos (sólo se permite cortar entre las perlas)?

Problema 2.76 30 personas votan por 5 candidatos. ¿Cuántas distribuciones posibles de los votos hay, si cada una de las personas vota por uno y sólo un candidato, y sólo nos interesa la cantidad de votos recibida por cada candidato?

Problema 2.77 Hay 10 tipos de postales en una oficina de correos. ¿Cuántas formas hay de comprar:
a) 12 postales?
b) 8 postales?

Problema 2.78 Un tren con m pasajeros hace n paradas.
a) ¿Cuántas maneras distintas hay de que los pasajeros se bajen del tren en las paradas?
b) Responde la misma pregunta si sólo tomamos en cuenta la *cantidad* de pasajeros que se bajan en cada parada.

Problema 2.79 En un monedero hay 20 monedas de 20 centavos, 20 de 50 centavos y 20 de un peso. ¿De cuántas formas puedes elegir 20 monedas de entre estas 60?

Problema 2.80 ¿De cuántas formas se pueden distribuir siete pelotas blancas y dos negras en nueve bolsas? Algunas de las bolsas pueden quedar vacías y las bolsas son distinguibles entre sí.

Problema 2.81 ¿De cuántas formas pueden 3 personas repartirse seis manzanas idénticas, una naranja, una ciruela y una mandarina (sin cortar niguna de las frutas)?

Problema 2.82 ¿Cuántas maneras hay de repartir 4 pelotas negras, 4 blancas y 4 azules en 6 cajas distintas?

Problema 2.83 Una comunidad con n miembros elige a su representante mediante una votación.
a) ¿Cuántos posibles resultados distintos hay para una votación abierta, si cada persona vota por una y sólo una persona (posiblemente ella misma)? Votación abierta significa que tomamos en cuenta no solamente el número de votos, sino quién votó por quién.
b) Responde la misma pregunta si la votación no es abierta (es decir, si sólo tomamos en cuanta la cantidad de votos que cada quien recibió).

Problema 2.84 ¿De cuántas maneras se pueden acomodar en hilera 5 pelotas rojas, 5 azules y 5 verdes de tal forma que no queden dos pelotas azules juntas?

Problema 2.85 ¿De cuántas maneras se puede representar al número 1000000 como el producto de tres factores enteros, si consideramos que maneras que difieren en el orden son distintas?

Problema 2.86 Hay 12 libros en una repisa. ¿De cuántas formas se pueden elegir 5 libros de ahí, si no se permite elegir dos libros consecutivos?

Los siguientes problemas tienen lugar en un lejano pueblo perdido en medio de la nada (no, no es Guanajuato), donde los autobuses del transporte público dan a los usuarios boletos numerados del 000000 al 999999. Algunas personas supersticiosas creen que la suma de los dígitos del número en el boleto tiene alguna importancia, y quieren calcular cuántos boletos tienen una cierta suma determinada (con el fin de determinar qué tan probable es que les toque un boleto con esa suma).

Problema 2.87 ¿Cuántos boletos tienen la suma de sus dígitos igual a 1? ¿A 2? ¿A k con $0 \leq k \leq 9$?

Problema 2.88 Evidentemente, los habitantes del pueblo del problema anterior no se conforman con tener la respuesta solamente para valores tan pequeños de la suma. Ahora calcula cuántos boletos tienen la suma de sus dígitos igual a k con $10 \leq k \leq 19$.

Problema 2.89 Si crees que con hacer el problema anterior los habitantes del susodicho pueblo te dejarán en paz, estás muy equivocado. Según una antigua costumbre ritual, es posible obtener ciertos beneficios a cambio de un boleto cuyos dígitos sumen 21. Calcula cuántos boletos de estos hay.

Problema 2.90 Como era de esperarse, hay quienes tienen otras supersticiones. Un cierto grupo cree que los boletos que dan buena suerte son aquellos cuyos números tienen únicamente cifras menores a 8, y tales que la suma de las cifras es 19. Calcula cuántos boletos cumplen esa propiedad.

Problema 2.91 Algunas personas son todavía más quisquillosas, y sostienen que los verdaderos boletos "de la suerte" son aquellos cuyos números tienen únicamente cifras mayores a 4 y menores a 8. Calcula cuántos boletos cumplen esa propiedad.

Problema 2.92 La lista de ideas raras no termina aún. Una secta sostiene que los mejores boletos son aquellos que tienen al menos una cifra mayor que 6, y suma igual a 18. ¿Cuántos hay?

2.4. Principio de inclusión y exclusión

El principio de inclusión y exclusión es una especie de generalización de la técnica del complemento para resolver problemas de combinatoria. Enunciarlo formalmente es complicado y muy poco ilustrativo, así que mejor resolveremos algunos problemas relacionados para familiarizarnos con él.

Problema 2.93 En un instituto de investigación científica trabajan 67 personas. De éstas, 47 hablan inglés, 35 alemán y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no hablan ni inglés ni alemán?

Problema 2.94 Para un número natural n se define $\varphi(n)$ (la función de Euler) como la cantidad de números menores o iguales a n que son primos relativos con n. Calcula: $\varphi(10)$, $\varphi(120)$, $\varphi(354)$ y $\varphi(1080)$.

Problema 2.95 ¿Cuántas permutaciones distintas pueden efectuarse con n elementos en las que dos de ellos, a y b, no estén juntos? ¿Y en las que no lo estén tres, a, b y c (en cualquier orden)? ¿Y en las que ningún par de los elementos a, b y c esté junto?

Problema 2.96 Un encuadernador debe encuadernar 12 libros diferentes en rojo, verde y azul. ¿De cuántos modos puede hacerlo, si por lo menos un libro debe estar encuadernado en cada color?

Problema 2.97 En un centro de investigación en matemáticas trabajan varias personas, y cada una de ellas habla por lo menos una lengua extranjera. Seis hablan inglés; seis, alemán; siete, francés. Cuatro hablan inglés y alemán; tres, alemán y francés; dos, francés e inglés. Una persona habla los tres idiomas. ¿Cuántas personas trabajan en el centro? ¿Cuántas de ellas hablan solamente inglés? ¿Y solamente francés?

Problema 2.98 ¿De cuántos modos se pueden permutar las letras de la palabra "tictac" si dos letras iguales no pueden ir una a continuación de la otra? Lo mismo, pero para la palabra "tamtam".

Problema 2.99 ¿Cuántos números enteros no negativos, menores que un millón, contienen a todas las cifras 1, 2, 3 y 4? ¿Cuántos están formados solamente por estas cifras?

Problema 2.100 ¿Cuántos números de seis cifras se pueden escribir a partir de las cifras del número 1233145254, de forma que no haya dos cifras iguales juntas?

Problema 2.101 ¿De cuántos modos se pueden permutar las cifras del número 12341234, de forma que no haya dos cifras iguales juntas? El mismo problema para el número 12345254.

Problema 2.102 ¿De cuántas maneras se pueden permutar las cifras del número 1234114546, de forma que no haya tres cifras iguales juntas? ¿Y de modo que no haya dos cifras iguales juntas?

Problema 2.103 A un ascensor subieron 8 personas. ¿De cuántas maneras pueden bajarse en cuatro pisos, de modo que en cada piso salga por lo menos una persona?

Problema 2.104 Demostrar que r cosas diferentes se pueden distribuir entre $n+p$ personas, de modo que n dadas obtengan por lo menos un objeto, de

$$\binom{n}{0}(n+p)^r - \binom{n}{1}(n+p-1)^r + \binom{n}{2}(n+p-2)^r - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} p^r$$

formas.

Problema 2.105 ¿De cuántas formas se pueden sentar juntos 3 ingleses, 3 franceses y 3 turcos, de modo que no haya tres compatriotas juntos? El mismo problema, pero con la condición de que no haya dos compatriotas juntos.

Problema 2.106 ¿De cuántas formas se pueden sentar a una mesa redonda 3 ingleses, 3 franceses y 3 turcos, de modo que no haya dos compatriotas juntos?

Problema 2.107 ¿De cuántas maneras pueden seis personas escoger de entre seis pares de zapatos uno derecho y uno izquierdo, de modo que ninguno obtenga un par? Lo mismo para 9 pares y 6 personas.

Problema 2.108 Las casillas de un tablero de ajedrez se pintan de 8 colores, de modo que en cada fila horizontal se encuentren los 8 colores, y en cada fila vertical no se encuentren dos casillas juntas pintadas del mismo color. ¿De cuántas formas es posible hacer esto?

2.5. Problemas mezclados

Aunque al principio es bueno resolver problemas “previamente etiquetados”, es decir, sabiendo *a priori* con cuál técnica es buena idea resolverlos, en la vida real los problemas no vienen así. Por eso, una vez que se han aprendido las técnicas, lo mejor es resolver problemas “sin etiquetar” para desarrollar la habilidad de reconocer cuándo hay que usar cada técnica.

Otro detalle importante que se debe aprender es que en general los problemas no necesariamente son “puros”, y un solo problema puede requerir herramientas de varios temas para su solución.

Problema 2.109 ¿De cuántas formas se pueden acomodar en línea recta siete pelotas blancas y cinco negras, de tal manera que no estén dos pelotas negras juntas?

Problema 2.110 ¿De cuántas formas se pueden escoger ocho enteros $a_1, a_2, \ldots, a_8$, no necesariamente distintos, de modo que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8 \leq 8$?

Problema 2.111 ¿Cuántos números menores que un millón hay tales que en sus cifras tienen exactamente dos nueves y un uno? ¿Cuántos números menores que un millón hay tales que en sus cifras aparece al menos un nueve?

Problema 2.112 En un troneo hubo ocho competidores (A, B, C, D, E, F, G y H). Cada uno jugó contra exactamente otros tres. En cada juego se le dieron dos puntos al ganador y cero al perdedor, o bien, en caso de empate, un punto a cada competidor. Si A obtuvo cuatro puntos, B obtuvo 2, C obtuvo tres, D obtuvo uno, E obtuvo seis, F obtuvo uno y G obtuvo cuatro, ¿cuántos puntos obtuvo H?

Problema 2.113 Durante una campaña política fueron hechas n diferentes promesas por los paridos políticos. No hay dos partidos distintos que hayan hecho exactamente las mismas promesas, aunque varios partidos pueden haber hecho una misma promesa. Se sabe además que cualesquiera dos partidos hicieron al menos una promesa en común. Demuestra que el número de partidos no puede ser mayor a 2^{n-1}.

Problema 2.114 Se tiene un tablero de 9×8 con un número en cada casilla de modo que los números en cada fila y en cada columna están en progresión aritmética y la suma de los números en las esquinas es 2001. Determina la suma de todos los números en el tablero.

Problema 2.115 Un polígono que está formado solo por lados verticales u horizontales se llama polígono ortogonal. Los vértices con ángulo interior de $90°$ se llaman convexos y los vértices con ángulo interior de $270°$ se llaman cóncavos. Sea r la cantidad de vértices cóncavos de un polígono ortogonal cualquiera y sea n el total de vértices del polígono. Demuestra que $n = 2r + 4$.

Problema 2.116 ¿Cuál es el mayor número de casillas que se pueden elegir en un tablero de 4×4 de modo que no haya tres cuyos centros formen un triángulo isósceles?

Problema 2.117 Cada casilla de un tablero de 15×15 es coloreada con alguno de los tres colores disponibles. Prueba que al menos con un color sucede que existen dos columnas que contienen el mismo número de casillas pintadas de ese color.

Problema 2.118 Una escalera tiene diez escalones numerados del uno al diez. Si se permite saltar los escalones que uno quiera, pero no regresarse, ¿cuántas maneras hay para ir del escalón uno al escalón diez?

Problema 2.119 De $3n + 1$ objetos, n son iguales entre sí y los restantes son distintos entre sí y distintos a los primeros. Prueba que las maneras de escoger n objetos de entre todos son 2^{2n}.

Problema 2.120 Se tienen $2n$ objetos de cada uno de tres tipos de objetos. Éstos son repartidos entre dos personas de tal manera que cada una obtiene $3n$ objetos. Prueba que esto se puede hacer de $3n^2 + 3n + 1$ formas distintas.

Capítulo 3

Teoría de números

3.1. Divisibilidad

La teoría de números, como uno esperaría de su nombre, estudia a los números. Iniciamos su estudio con los números enteros, que son el tipo de números "más sencillos" en cierto sentido.

Todo lo que haremos se basa en el concepto de divisibilidad, con el cual casi todo el mundo está más o menos familiarizado. Decimos que a divide a b, o que b es divisible entre a, (con símbolos, $a|b$), si el resultado de dividir b entre a es entero.

El teorema más importante en esta parte es el siguiente, que enunciamos sin demostración por ser demasiado técnica, y por lo tanto no aporta nada para nuestros propósitos.

Teorema Fundamental de la Aritmética. Todo número natural diferente de 1 puede ser representado de manera única (salvo por el orden) como un producto de números primos.

A continuación, algunos problemas pensados para introducir ideas y conceptos importantes del tema.

Problema 3.1 Responde:
a) ¿Es $2^9 \times 3$ divisible entre 2?
b) ¿Es $2^9 \times 3$ divisible entre 5?
c) ¿Es $2^9 \times 3$ divisible entre 8?
d) ¿Es $2^9 \times 3$ divisible entre 9?
e) ¿Es $2^9 \times 3$ divisible entre 6?

Problema 3.2 ¿Es cierto que si un número natural es divisible entre 4 y entre 3, entonces es divisible entre $4 \times 3 = 12$?

Problema 3.3 ¿Es cierto que si un número natural es divisible entre 4 y entre 6, entonces es divisible entre $4 \times 6 = 24$?

Problema 3.4 El número A no es divisible entre 3. ¿Es posible que el número $2A$ sea divisible entre 3?

Problema 3.5 El número A es par. ¿Es cierto que el número $3A$ debe ser divisible entre 6?

Definición: Dos números naturales se dicen relativamente primos (coprimos, o primos relativos) si no tienen un divisor común mayor que 1.

Usando un razonamiento similar al de los problemas 2 al 5, podemos probar los dos hechos siguientes:

Problema 3.6 Si un número natural es divisible entre dos números primos relativos p y q, entonces éste es divisible entre su producto pq.

Problema 3.7 Si el número pA es divisible entre q, donde p y q son coprimos, entonces A es también divisible entre q.

Definiciones:

- *Máximo Común Divisor*: El máximo común divisor de dos números naturales x e y, simbolizado como (x, y) o $mcd(x, y)$, es el número natural más grande que divide a ambos.
- *Mínimo Común Múltiplo*: El mínimo común múltiplo de dos números naturales x e y, simbolizado como $[x, y]$ o $mcm(x, y)$, es el número natural más pequeño el cual es divisible entre ambos.

Problema 3.8 Dados los números $A = 2^3 \times 3^{10} \times 5 \times 7^2$ y $B = 2^5 \times 3 \times 11$, encuentre (A, B).

Problema 3.9 Dados los números $A = 2^8 \times 5^3 \times 7$ y $B = 2^5 \times 3 \times 5^7$, encuentre $[A, B]$.

Problema 3.10 Dados dos números primos distintos p y q, encuentre el número de diferentes divisores positivos de:
a) pq
b) p^2q
c) p^2q^2
d) p^nq^m

Problema 3.11 Pruebe que el producto de cualesquiera tres números naturales consecutivos es divisible entre 6.

Problema 3.12 Pruebe que el producto de cualesquiera cinco números naturales consecutivos es:
a) divisible entre 30.
b) divisible entre 120.

Problema 3.13 Dado un número primo p, encuentre la cantidad de números naturales los cuales son menores que p y relativamente primos con él.

Problema 3.14 Dado un número primo p, encuentre la cantidad de números naturales los cuales son menores que p^2 y relativamente primos con él.

Problema 3.15 Encuentre el menor número natural n tal que $n!$ es divisible entre 990.

Problema 3.16 ¿Cuántos ceros hay al final de la representación decimal del número 100!?

Problema 3.17 Para algún número n, ¿puede el número $n!$ tener exactamente 5 ceros al final de su representación decimal?

Problema 3.18 Pruebe que si un número tiene un número impar de divisores, entonces éste es un cuadrado perfecto.

Problema 3.19 ¿Puede un número escrito con cien 0's, cien 1's, y cien 2's ser un cuadrado perfecto?

Problema 3.20 Encuentra todas las soluciones en números naturales de las ecuaciones:
a) $x^2 - y^2 = 31$
b) $x^2 - y^2 = 303$

Problema 3.21 Encuentre las soluciones enteras de la ecuación $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

Problema 3.22 Prueba que para cualesquiera dos números naturales a y b se tiene que

$$mcm(a, b) \times mcd(a, b) = ab.$$

3.2. Residuos

Supongamos que te encuentras en un país en el que circulan monedas de valores poco comunes, por ejemplo, de 1, 3, 15 y 20 centavos. Un buen día, quieres comprar un dulce de una máquina expendedora que no da cambio, el cual cuesta 3 centavos. Sin embargo, tú sólo tienes una moneda de 15 centavos, con la cual no puedes comprar el dulce. Afortunadamente, justo al lado encuentras una máquina que te puede dar cualquier cantidad de monedas de 3 centavos. Evidentemente, obtienes 5 monedas de 3 centavos a cambio de tu moneda de 15 centavos, y puedes comprar el dulce. ¿Qué habría sucedido si en vez de una moneda de 15 centavos, hubieras tenido una de 20? Resulta que la máquina cambiadora también da monedas de un centavo, por lo que habrías obtenido 6 monedas de 3 centavos y 2 de un centavo. Entonces se tiene que $20 = 6 \cdot 3 + 2$, lo cual es una manera de representar a la operación de división con un *residuo*.

¿Cómo funciona esta máquina en general? Es decir, si le introduces alguna cantidad de centavos para cambiar, ¿cómo decide exactamente cuántas monedas darte de cada tipo? Una posible solución sería darte puras monedas de un centavo, pero es una manera muy poco práctica pues terminarías con demasiadas monedas en los bolsillos. Para que te dé la menor cantidad posible de monedas, lo que debe hacer es darte la mayor cantidad posible de monedas de 3 centavos. Eso quiere decir que se fija en la cantidad de dinero depositada y empieza a dar monedas de 3 centavos hasta que ya no pueda, es decir, hasta que la cantidad de centavos que todavía le falte regresar sea menor que 3. Como ya no puede dar monedas de 3 centavos, no le queda más remedio que darte lo que falta en monedas de un centavo, de las cuales te dará 0, 1 o 2. Es claro que la máquina no te dará ninguna moneda de un centavo si y sólo si la cantidad de centavos que depositaste en la máquina es un múltiplo de 3.

Análogamente, podemos imaginar una máquina que da monedas de m centavos hasta que ya no es posible, y posteriormente devuelve lo que falta en monedas de un centavo, de las cuales dará 0, 1, ..., o $m-1$. Esta máquina representa la división entre m con *residuo*.

Todo mundo sabe lo que es dividir pero, ¿qué significa esto del *residuo*? Formalmente:

Definición. Dividir a un número natural n entre el número natural m con residuo significa representar al número n como $n = km + r$, donde $0 \leq r < m$. Al número r lo llamamos el residuo de dividir n entre m.

Ejercicio. Demostrar que dados n y m, el residuo de dividir n entre m es único.

Ejercicio. Demostrar que n es divisible entre m si y sólo si el residuo de dividir n entre m es 0.

Ejercicio. a) La suma de cualesquiera dos números naturales tiene el mismo residuo, cuando la dividimos entre 3, que la suma de sus residuos.
a) El producto de cualesquiera dos números naturales tiene el mismo residuo, cuando lo dividimos entre 3, que el producto de sus residuos.

Lo anterior es una propiedad muy importante de los residuos, y de hecho es cierta si en vez de 3 pones cualquier m. Demuéstralo.

Problema 3.23 a) Encuentra el residuo de $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1993^3$ cuando lo divides entre 7.
b) Encuentra el residuo de 9^{100} cuando lo divides entre 8.

Problema 3.24 Prueba que el número $n^3 + 2n$ es divisible entre 3 para cualquier número natural n.

Solución. El residuo del número n al ser dividido entre 3 sólo puede ser 0, 1 0 2. Consideramos entonces los tres casos:
Si n tiene residuo 0, entonces tanto n^3 como $2n$ son divisibles entre 3, y por lo tanto $n^3 + 2n$ lo es.
Si n tiene residuo 1, entonces n^3 tiene tiene residuo 1, $2n$ tiene residuo 2 y $1 + 2$ es divisible entre 3.
Si n tiene residuo 2, entonces n^2 tiene tiene residuo 1, n^3 tiene tiene residuo 2, $2n$ tiene residuo 1 y

$2+1$ es divisible entre 3.
Como en cualquiera de los tres casos n^2+2n es divisible entre 3, concluimos que n^2+2n es divisible entre 3 para todo n.

Problema 3.25 Prueba que n^5+4n es divisible entre 5 para cualquier número natural n.

Problema 3.26 Prueba que n^2+1 no es divisible entre 3 para ningún número natural n.

Problema 3.27 Prueba que n^3+2 no es divisible entre 9 para ningún número natural n.

Problema 3.28 Prueba que n^3-n es divisible entre 24 para cualquier n impar.
Sugerencia. Prueba que es divisible entre 3 y luego que lo es entre 8.

Problema 3.29 a) Prueba que p^2-1 es divisible entre 24 si p es un primo mayor a 3.
b) Prueba que p^2-q^2 es divisible entre 24 si p y q son primos mayores a 3.

Problema 3.30 Los números x, y y z satisfacen la ecuación $x^2+y^2=z^2$. Prueba que al menos uno de ellos es divisible entre 3.

Problema 3.31 Dados números naturales a y b tales que a^2+b^2 es divisible entre 21, prueba que la misma suma de cuadrados es divisible entre 441.

Problema 3.32 Dados números naturales a, b, y c tales que $a+b+c$ es divisible entre 6, prueba que $a^3+b^3+c^3$ también es divisible entre 6.

Problema 3.33 Los números primos p, q y r mayores a 3 están en progresión aritmética, es decir $p=p$, $q=p+d$, $r=p+2d$. Prueba que d es divisible entre 6.

Problema 3.34 Prueba que si decrecemos en 7 la suma de los cuadrados de tres números naturales, entonces el resultado no puede ser divisible entre 8.

Problema 3.35 La suma de los cuadrados de tres números naturales es divisible entre 9. Prueba que podemos elegir dos de esos números de tal forma que su diferencia también sea divisible entre 9.
Sugerencia. Si dos números tienen el mismo residuo al ser divididos entre 9, entonces su diferencia es divisible entre 9.

Continuemos con algunos problemas de otro estilo.

Problema 3.36 Encuentra el último dígito de 1989^{1989}.

Problema 3.37 Encuentra el último dígito de 2^{50}.

Problema 3.38 ¿Cuál es el último dígito de 777^{777}?

Problema 3.39 Encuentra el residuo de 2^{100} cuando lo divides entre 3.

Problema 3.40 Encuentra el residuo de 3^{1989} cuando lo divides entre 7.

Problema 3.41 Prueba que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es divisible entre 7.

Problema 3.42 Encuentra el último digito de 7^{7^7}.

En los problemas del 3.24 al 3.35 usamos la misma idea: analizar por casos los residuos al dividir entre algún número n. Además, el número n pudo ser reconocido fácilmente del enunciado del problema. En los siguientes problemas, reconocer el número n no será tan fácil. El "arte de adivinar" requiere cierta experiencia y puede ser algo difícil, pero hay unos cuantos "trucos estándar" que se usan con frecuencia.

Problema 3.43 Si se sabe que p, $p+10$ y $p+14$ son primos, encuentra p.

Problema 3.44 Dados el par de números primos p y p^2+2, prueba que p^3+2 también es un primo.

Problema 3.45 Prueba que no hay números naturales a y b tales que $a^2-3b^2=8$

Problema 3.46 a) ¿Puede la suma de dos cuadrados perfectos ser un cuadrado perfecto?
b) ¿Puede la suma de tres cuadrados de números impares ser un cuadrado perfecto?

Problema 3.47 Prueba que la suma de los cuadrados de cinco números naturales consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

Problema 3.48 Si p, $4p^2+1$ y $6p^2+1$ son primos, encuentra p.

Nota. Con frecuencia, problemas acerca de cuadrados (como los del 3.44 al 3.48) pueden ser resueltos usando residuos al dividir entre 3 o 4. Esto se debe a que, al ser divididos entre 3 o 4, los cuadrados perfectos sólo pueden tener residuo 0 o 1.

Problema 3.49 Prueba que el número $1000\ldots0005000\ldots0001$ (cien ceros en cada grupo) no es un cubo perfecto.

Problema 3.50 Prueba que a^3+b^3+4 no es un cubo perfecto para ningún par de números a y b.

Problema 3.51 Prueba que $6n^3+3$ no puede ser una sexta potencia de un entero para ningún n.

Nota. Cuando uno se enfrenta a problemas que tratan acerca de cubos de enteros (como los del 3.49 al 3.51), muchas veces es útil analizar los residuos al dividir entre 7 o 9. En ambos casos, sólo hay tres residuos posibles: $\{0,1,6\}$ y $\{0,1,8\}$ respectivamente.

Finalmente, algunos problemas variados.

Problema 3.52 a) Si se sabe que $a+1$ es divisible entre 3, prueba que $4+7a$ también es divisible entre 3.
b) Se sabe que $2+a$ y $35-b$ son divisibles entre 11. Prueba que $a+b$ también es divisible entre 11.

Problema 3.53 Encuentra el último dígito de $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 99^2$.

Problema 3.54 Siete números naturales son tales que la suma de cualesquiera seis de ellos es divisible entre 5. Prueba que todos ellos son divisibles entre 5.

Problema 3.55 Prueba que para cualquier $n > 1$ la suma de cualesquiera n números impares consecutivos es un número compuesto.

Problema 3.56 Encuentra el menor número tal que tenga residuo 1 cuando lo divides entre 2, residuo 2 cuando lo divides entre 3, residuo 3 cuando lo divides entre 4, residuo 4 cuando lo divides entre 5 y residuo 5 cuando lo divides entre 6.

Problema 3.57 Prueba que si $(n-1)! + 1$ es divisible entre n entonces n es primo.

Problema 3.58 Prueba que existe un número n tal que $n+1$, $n+2$, ..., $n+1989$ son todos compuestos.

Problema 3.59 Prueba que existen una infinidad de números primos.

Problema 3.60 Prueba los criterios de divisibilidad del 3 y del 9.

Problema 3.61 Prueba los criterios de divisibilidad del 4, del 5 y del 11.

Problema 3.62 Prueba los criterios de divisibilidad del 7 y del 13.

3.3. Congruencias

Decimos que $a \equiv b \pmod{m}$ si y solo si a y b tienen el mismo residuo al ser divididos entre m.

Problema 3.63 Prueba que $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $m | a - b$

Problema 3.64 Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{m}$.

Problema 3.65 Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$. Da un ejemplo donde el inverso no sea cierto.

Problema 3.66 Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $ak \equiv bk \pmod{m}$ para cualquier k. Da un ejemplo donde el inverso no sea cierto.

Problema 3.67 Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$ entonces $ac \equiv bd \pmod{m}$. Da un ejemplo donde el inverso no sea cierto.

Problema 3.68 Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para cualquier natural n. Da un ejemplo donde el inverso no sea cierto.

Problema 3.69 Prueba que $n^2 + 1$ no es divisible entre 3 para ningún n.

Problema 3.70 Encuentra el residuo de 6^{100} cuando lo divides entre 7.

Problema 3.71 ¿Existirá un número n tal que $n^2 + n + 1$ sea divisible entre 1955?

Problema 3.72 Prueba que $11^{2n+1} + 122^{2n+1}$ es divisible entre 133 para cualquier natural n.

Problema 3.73 Sea n un número tal que $n + 1$ es divisible entre 24. Prueba que la suma de los divisores de n también es divisible entre 24.

Utilizando la expansión decimal de un número, prueba los siguientes enunciados:

Problema 3.74 Prueba el criterio de divisibilidad entre 4.

Problema 3.75 El último dígito del cuadrado de un número natural es 6. Prueba que el penúltimo dígito del cuadrado es impar.

Problema 3.76 El penúltimo dígito de un cuadrado es impar. Prueba que su último dígito es 6.

Problema 3.77 Prueba que una potencia de 2 no puede terminar con cuatro dígitos iguales.

Problema 3.78 Encuentra un número de al menos 100 dígitos sin ceros en su representación decimal, tal que sea divisible entre la suma de sus dígitos.

Problema 3.79 Prueba que todo número es congruente con la suma de sus dígitos módulo 9.

Problema 3.80 Prueba los criterios de divisibilidad entre 5, 7, 11 y 13.

Problema 3.81 Se calcula la suma de los dígitos de 2^{100}. Luego se calcula la suma de los dígitos del número que se obtiene y se sigue con el mismo procedimiento hasta que resulta un solo dígito. ¿Cuál es ese dígito?

Problema 3.82 ¿Cuantos números de cuatro dígitos con el número 97 en el centro son divisibles entre 45?

Problema 3.83 Encuentra el menor número divisible entre 36 que tiene a los 10 dígitos en su representación decimal.

Problema 3.84 Prueba que el producto del último dígito de $2n$ y la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

Problema 3.85 ¿Puede la suma de los dígitos de un cuadrado perfecto ser 1970?

Problema 3.86 Sea A la suma de los dígitos de 4444^{4444}. Sea B la suma de los dígitos de A. Encuentra la suma de los dígitos de B.

Problema 3.87 Sea $abcdef$ un número de seis dígitos que satisface que $def - abc$ es divisible entre 7. Prueba que el número original es divisible entre 7. Encuentra el criterio de divisibilidad entre 7.

Problema 3.88 El número de seis dígitos $abcdef$ es tal que $abc + def$ es divisible entre 37. Prueba que el número original es divisible entre 37.

Problema 3.89 ¿Existe un número de tres dígitos abc tal que $abc - cba$ es un cuadrado perfecto?

3.4. Problemas mezclados

Problema 3.90 Encuentra todos los primos p, tales que: $2p + 1$, $3p + 1$ y $p(2p + 1)(3p + 1) + 1$ también sean primos.

Problema 3.91 Sean a, b y c enteros positivos tales que a y b son impares. ¿Cuál es el residuo de $3^a + (b - 1)^2 c$ al dividirlo entre 4?

Problema 3.92 Demuestra que $1^{1983} + 2^{1983} + \cdots + 1986^{1983}$ es divisible entre 1987.

Problema 3.93 Prueba que si un número primo p se escribe como $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, con $p_1 < p_2 < p_3$ primos, entonces $p_1 = 3$.

Problema 3.94 Demuestra que si un triángulo rectángulo tiene lados enteros a, b y c, entonces $30 | a \cdot b \cdot c$.

Problema 3.95 Demuestra que 1992 divide a uno (y por lo tanto a una infinidad) de los números de la forma $10^{n_1} + 10^{n_2} + \cdots + 10^{n_k}$, con $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$.

Problema 3.96 Se tiene una fila de $n \geq 12$ enteros positivos consecutivos. Dos jugadores, primero A y luego B, juegan tachando el entero de su elección hasta que solamente quedan dos números, a y b. A gana si a y b son primos relativos, y B gana en el otro caso. Si n es impar, ¿escogerías jugar primero o segundo?

Problema 3.97 Sea n un entero positivo. Prueba que si $3n + 1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ es la suma de tres cuadrados perfectos.

Problema 3.98 La primera fila de la tabla que se muestra a continuación, se completa con los números del 1 al 10, en ese orden. La segunda fila se completa con los números del 1 al 10, en cualquier orden. En cada casilla de la tercera fila se escribe la suma de los dos números escritos arriba. ¿Hay alguna forma de completar la segunda fila de modo que las cifras de las unidades de los números de la tercera fila sean todas distintas?

Problema 3.99 Si n no es un primo entonces $2^n - 1$ no es un primo.

Problema 3.100 Si n tiene un divisor impar entonces $2^n + 1$ no es un primo.

Problema 3.101 $641|2^{32}+1$

Problema 3.102 Encuentra un numero de 100 dígitos sin ceros en su representación decimal tal que sea divisible entre la suma de sus dígitos. Prueba que existen una infinidad de ellos (no necesariemente con 100 dígitos).

Problema 3.103 Un numero con 3^n dígitos iguales es divisible entre 3^n.

Problema 3.104 Si $2n+1$ y $3n+1$ son cuadrados entonces $5n+3$ no es un primo.

Problema 3.105 Si p es un primo entonces $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

Problema 3.106 Si n es impar entonces $323|20^n+16^n-3^n-1$.

Problema 3.107 $121 \not| n^2+3n+5$.

Problema 3.108 Dados $n+1$ enteros positivos menores o iguales a $2n$ siempre hay dos, digamos p y q tales que $p|q$.

Problema 3.109 $120|n^5-5n^3+4n$. $\quad 9|4^n+15n-1$.

Problema 3.110 Sea $p = p_1p_2\dots p_n$ el producto de los primeros n primos. Prueba que $p-1$ y $p+1$ no son cuadrados.

Problema 3.111 Si $a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n+a_na_1 = 0$ con $a_i \in \{-1,1\}$ entonces $4|n$.

Problema 3.112 Tres hermanos se van a repartir una herencia de n piezas de oro con pesos $\{1,2,...,n\}$. ¿Para cuáles n se pueden repartir el oro en partes iguales sin romper ninguna pieza?

Problema 3.113 Encuentra el menor n tal que $999999 \cdot n = 1111\cdots111$.

Problema 3.114 Encuentra el menor entero positivo n con la propiedad de que si mueves el primer dígito al final, el número que te queda es 1.5 veces más grande que el inicial.

Problema 3.115 Sea n un natural tal que $n+1$ es divisible entre 24. Prueba que la suma de todos los divisores de n también es divisible entre 24.

Problema 3.116 ¿Qué números enteros positivos se vuelven 57 veces más grande al quitarles el dígito inicial? Encuentra el menor de ellos.

Problema 3.117 ¿Cuántas veces ocurre el factor 2 en el producto $(n+1)(n+2)\cdots(2n)$?

Problema 3.118 Prueba que todos los números en la secuencia $10001, 100010001, 1000100010001, \dots$ son compuestos.

Problema 3.119 Prueba que hay una cantidad infinita de números compuestos en la secuencia $1, 31, 331, 3331, \dots$

Problema 3.120 Encuentra todos los n tales que $3|n \cdot 2^n - 1$.

Problema 3.121 Encuentra el menor entero positivo a tal que $1971|50^n + a \cdot 23^n$ para todo n impar.

Problema 3.122 Sean a y b enteros positivos con $b > 2$. Prueba que nunca pasa que $2^b - 1|2^a + 1$.

Problema 3.123 ¿Puede el producto de tres enteros consecutivos ser la potencia de un entero? Lo mismo para cuatro enteros.

Problema 3.124 Prueba que $1982|2222 \cdots 2222$ (1980 2's).

Problema 3.125 Encuentra el menor entero que termina en 1986 tal que es divisible entre 1987.

Problema 3.126 Los números $1, 2, \ldots, 1986$ se escriben en algún orden y se juntan. Prueba que simepre se obtiene un entero que no es el cubo de otro entero.

Problema 3.127 ¿Para cuáles enteros positivos n se tiene que $(1 + 2 + \cdots + n)|n!$?

Problema 3.128 Dos jugadores A y B alternadamente toman fichas de dos pilas con a y b fichas respectivamente. Inicialmente $a > b$. Un movimiento consiste en tomar de la pila un múltiplo del número de fichas de la otra pila. El ganador es aquél que toma la última ficha en alguna de las pilas. Prueba que si $a > 2b$ entonces el primer jugador A puede forzar a ganar.

Problema 3.129 Si p y q son enteros positivos tales que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{p}{q}$ entonces $1979|p$.

Capítulo 4

Geometría

4.1. Varios

Problema 4.1 Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero a sus lados es igual a la altura del triángulo equilátero.

Problema 4.2 Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A pasan las cuerdas AC y AD que tocan a las circunferencias dadas. Demostrar que $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

Problema 4.3 Demostrar que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide a la mitad el ángulo entre la mediana y la altura correspondientes a la hipotenusa de dicho triángulo.

Problema 4.4 Dos rectas paralelas a las bases de un trapecio dividen a sus dos lados en tres partes iguales. Todo el trapecio queda dividido en tres partes por esas dos rectas. Hallar el área de la parte media si las áreas de los extremos son S_1 y S_2.

Problema 4.5 Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases de un trapecio que pasa por el punto de intersección de las diagonales si las bases miden a y b.

Problema 4.6 La base media de un trapecio es igual a a y las diagonales son mutuamente perpendiculares. Hallar el área del trapecio.

Problema 4.7 El área de un rombo es S y la suma de sus diagonales es m. Hallar el lado del rombo.

Problema 4.8 Un cuadrado de lado a esta inscrito en una circunferencia. Hallar el lado del cuadrado inscrito en una de las cuatro regiones iguales obtenidas.

Problema 4.9 Se dan una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son las tangentes a la circunferencia. Demostrar que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla sobre la circunferencia.

4.2. Problemas de cálculo

Problema 4.10 Demostrar que las medianas en el triángulo se intersecan en un punto y se dividen por éste en razón de 1 : 2.

Problema 4.11 Demostrar que las medianas dividen el triángulo en seis partes equivalentes.

Problema 4.12 Demostrar que el diámetro de la circunferencia que circunscribe un triángulo es igual a la razón entre su lado y el seno del ángulo opuesto.[1]

Problema 4.13 Supongamos que el vértice de un ángulo se encuentra fuera de un círculo y sus lados intersecan la circunferencia. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semidiferencia entre los arcos cortados por sus lados en la circunferencia, dispuestos en el interior del ángulo.

Problema 4.14 Supongamos que el vértice de un ángulo se halla dentro de un círculo. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semisuma de los arcos, uno de los cuales se encuentra entre sus lados, mientras que el otro se halla entre sus prolongaciones más allá del vértice del ángulo.

Problema 4.15 Sea AB la cuerda de una circunferencia; l , la tangente a la misma (A es el punto de tangencia). Demostrar que cada uno de los dos ángulos entre AB y l se determina como la mitad del arco de la circunferencia comprendida en el interior del ángulo examinado.

Problema 4.16 Por el punto M situado a la distancia a del centro de la circunferencia de radio R $(a > R)$, está trazada una secante que corta la circunferencia en los puntos A y B. Demostrar que $MA \cdot MB$ es constante para todas las secantes y es igual $a^2 - R^2$ (el cuadrado de la longitud de la tangente).

Problema 4.17 Por el punto M que se halla a una distancia a del centro de una circunferencia de radio R ($a < R$), pasa la cuerda AB. Demostrar que $AM \cdot MB$ es constante para todas las cuerdas y es igual a $R^2 - a^2$.

Problema 4.18 Sea AM una bisectríz interior del triángulo ABC. Demostrar que $BM : CM = AB : AC$. Lo mismo es cierto para la bisectríz del ángulo exterior del triángulo. (En este caso M se halla en la prolongación del lado BC).

Problema 4.19 Demostrar que la suma de las diagonales al cuadrado de un paralelogramo es igual a la suma de sus lados al cuadrado.

Problema 4.20 Los lados de un triángulo son a, b y c. Demostrar que la mediana M_a trazada hacia el lado a se calcula por la fórmula:

$$M_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

[1] Este resultado es conocido como la ley de senos.

Problema 4.21 Tenemos dos triángulos con un vértice A común. Los demás vértices se encuentran en dos rectas que pasan por A. Demostrar que la razón entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón entre los productos de los dos lados de cada triángulo que contienen el vértice A.

Problema 4.22 Demostrar que el área de un polígono circunscrito es igual a $r \cdot p$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita, p, su semiperímetro (como caso particular, esta fórmula es válida para el triángulo).

Problema 4.23 Demostrar que el área del cuadrilátero es igual al semiproducto de las diagonales por el seno del ángulo comprendido entre éstas.

Problema 4.24 Demostrar la validez de las fórmulas siguientes para calcular el área S del triángulo:

$$S = a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$
$$S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$

Donde A, B, C son los ángulos del triángulo, a, el lado dispuesto frente al ángulo A; R, el radio del círculo circunscrito.

Problema 4.25 Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo se determina por la fórmula

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

donde a y b son los catetos, y c la hipotenusa.

Problema 4.26 Demostrar que si a y b son dos lados de un triángulo, α es el ángulo entre éstos y l, la bisectríz de este ángulo,entonces

$$l = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

Problema 4.27 Demostrar que las distancias desde el vértice A del triángulo ABC hasta los puntos de tangencia de los lados AB y AC con la circunferencia inscrita son iguales a $p-a$, donde p es el semiperímetro del triángulo ABC y $a = BC$.

Problema 4.28 Demostrar que si en el cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple la relación $AB + CD = AD + BC$, deberá existir una circunferencia que sea tangente a todos sus lados.

Problema 4.29 Demostrar que las alturas en un triángulo se intersecan en un punto.

Problema 4.30 Demostrar que la distancia desde el vértice de un triángulo hasta el punto de intersección de sus alturas es dos veces mayor que la distancia desde el centro del círculo circunscrito hasta el lado opuesto.

Problema 4.31 En el lado de un ángulo recto con el vértice en el punto O se toman dos puntos A y B, siendo que $OA = a$ y $OB = b$. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A y B, a la cual es tangente el otro lado del ángulo.

Problema 4.32 La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c y uno de los ángulos agudos es igual a $30°$. Encontrar el radio de la circunferencia con el centro en el vértice del ángulo de $30°$ que divide el triángulo dado en dos partes equivalentes (es decir, de la misma área).

Problema 4.33 Los catetos de un triángulo rectángulo son a y b. Encontrar la distancia desde el vértice del ángulo recto hasta el punto de la circunferencia inscrita, más próximo a aquél.

Problema 4.34 La mediana de un triángulo rectángulo es igual a m y divide el ángulo recto en razón de $1 : 2$. Hallar el área del triángulo.

Problema 4.35 Los lados de un triángulo ABC son $BC = a, CA = b, AB = c$. Determinar la relación, en la cual el punto de intersección de las bisectrices divide la bisectríz del ángulo B.

Problema 4.36 Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto de la base del triángulo isósceles hasta sus lados es igual a la altura de este triángulo trazada hasta el lado de éste.

Problema 4.37 Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto interior de un triángulo regular hasta sus lados es igual a la altura de este triángulo.

Problema 4.38 Sobre la base AC del triángulo isósceles ABC se toma un punto M de manera que $AM = a$ y $MC = b$. En los triángulos ABM y CBM están inscritas circunferencias. Hallar la distancia entre los puntos de tangencia del lado BM con estas circunferencias.

Problema 4.39 Un paralelogramo con los lados a y b y un ángulo α tiene trazadas las bisectrices de los cuatro ángulos. Hallar el área del cuadrilátero limitado por las bisectrices.

Problema 4.40 Un rombo, cuya altura es h y el ángulo agudo es α tiene inscrita una circunferencia. Hallar el radio de la circunferencia mayor de las dos posibles, cada una de las cuales es tangente a la circunferencia dada y a dos lados del rombo.

Problema 4.41 Determinar el ángulo agudo de un rombo, cuyo lado es la media proporcional de sus diagonales.

Problema 4.42 Las diagonales de un cuadrilátero convexo son a y b, y los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos, son iguales. Hallar el área del cuadrilátero.

Problema 4.43 El lado AD del rectángulo $ABCD$ es tres veces mayor que el lado AB, y los puntos M y N dividen AD en tres partes iguales. Hallar $AMB + ANB + ADB$.

Problema 4.44 Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A pasan las cuerdas AC y AD que tocan a las circunferencias dadas. Demostrar que $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

Problema 4.45 Demostrar que la bisectríz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.

Problema 4.46 En una circunferencia de radio r están elegidos tres puntos de manera que la circunferencia queda dividida en tres arcos que se relacionan como $3 : 4 : 5$. Desde los puntos de división hasta la circunferencia están trazadas tangentes. Hallar el área del triángulo formado por estas tangentes.

Problema 4.47 Alrededor de una circunferencia está circunscrito un trapecio isóceles con el lado l , siendo una de las bases de éste igual a a. Hallar el área del trapecio.

Problema 4.48 Dos rectas paralelas a las bases de un trapecio dividen cada uno de sus lados en tres partes iguales. Todo el trapecio se encuentra dividido por aquéllas en tres partes. Hallar el área de la parte media, si las áreas de las partes extremas son S_1 y S_2.

Problema 4.49 En el trapecio $ABCD$ $AB = a$ y $BC = b$ ($a > b$). Determinar si la bisectríz del ángulo A corta la base BC o el lado CD.

Problema 4.50 Hallar la longitud del segmento de una recta paralela a las bases de un trapecio, la cual pasa por el punto de intersección de las diagonales,si las bases del trapecio son a y b.

Problema 4.51 En un trapecio isósceles circunscrito alrededor de una circunferencia la razón de los lados paralelos es igual a k. Hallar el ángulo de la base.

Problema 4.52 La base AB del trapecio $ABCD$ es a y la base CD es b . Hallar el área del trapecio si se sabe que sus diagonales son las bisectrices de los ángulos DAB y ABC.

Problema 4.53 La base media de un trapecio isósceles es a y las diagonales son mutuamente perpendiculares. Hallar el área del trapecio.

Problema 4.54 El área de un trapecio isósceles circunscrito alrededor de un círculo es igual a S y su altura, dos veces menor que su lado. Determinar el radio del círculo inscrito en el trapecio.

Problema 4.55 Las áreas de los triángulos formados por segmentos de las diagonales de un trapecio y sus bases son S_1 y S_2 . Hallar el área del trapecio.

Problema 4.56 El ángulo ABC del triángulo ABC es igual a α. Hallar el ángulo AIC, donde I es el centro de la circunferencia inscrita.

Problema 4.57 Un triángulo rectángulo tiene trazada la bisectríz del ángulo recto. Hallar la distancia entre los puntos de intersección de las alturas de los dos triángulos formados, si los catetos del triángulo dado son a y b.

Problema 4.58 Una recta perpendicular a dos lados de un paralelogramo divide éste en dos trapecios, en cada uno de los cuales se puede inscribir una circunferencia. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo, si sus lados son iguales a a y b ($a < b$).

Problema 4.59 Se da un semicírculo, cuyo diámetro es AB. Por el punto medio de la semicircunferencia se trazan dos rectas que dividen el semicírculo en tres partes de áreas equivalentes. ¿En qué razón dividen estas rectas el diámetro AB?

Problema 4.60 Se da el cuadrado $ABCD$, cuyo lado es a, y están construidas dos circunferencias. La primera circunferencia se encuentra totalmente en el interior del cuadrado $ABCD$ y es tangente al lado AB en E, así como con el lado BC y la diagonal AC. La segunda circunferencia con su centro en el punto A pasa por el punto E. Hallar el área de la parte común de los dos círculos limitados por estas circunferencias.

Problema 4.61 Los vértices de un hexágono regular de lado a son los centros de circunferencias, cuyos radios son iguales a $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Hallar el área de la parte del hexágono dispuesta fuera de estas circunferencias.

Problema 4.62 Fuera de una circunferencia de radio R se toma el punto A, desde el cual están trazadas dos secantes: una de éstas pasa por el centro, mientras que la otra pasa a una distancia $\frac{R}{2}$ del mismo. Hallar el área de la parte del círculo dispuesta entre estas secantes.

Problema 4.63 En el cuadrilátero $ABCD$ se tienen los ángulos: $DAB = 90°$ y $DBC = 90°$. Además, $DB = a$ y $DC = b$. Hallar la distancia entre los centros de dos circunferencias, una de las cuales pasa por los puntos D, A y B, y la otra, por los puntos B, C y D.

Problema 4.64 En los lados AB y AD del rombo $ABCD$ se eligen dos puntos M y N de manera que las rectas MC y NC dividen el rombo en tres partes de áreas iguales. Hallar MN, si $BD = d$.

Problema 4.65 En el lado AB del triángulo ABC se toman dos puntos M y N de manera que $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$. Por los puntos M y N están trazadas rectas paralelas al lado AC. Hallar el área de la parte del triángulo comprendida entre las rectas, si el área del triángulo ABC es igual a S.

Problema 4.66 Se dan una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demostrar que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla en la circunferencia dada.

Problema 4.67 El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia y en el arco BC se toma un punto arbitrario M. Demostrar que $AM = BM + CM$.

Problema 4.68 Sea H el punto de intersección de las alturas del ABC. Hallar los ángulos del ABC, si $\angle BAH = \alpha$ y $\angle ABH = \beta$.

Problema 4.69 El área de un rombo es S, y la suma de sus diagonales es m. Hallar el lado del rombo.

Problema 4.70 Un cuadrado de lado a está inscrito en una circunferencia. Hallar el lado del cuadrado inscrito en uno de los segmentos obtenidos.

Problema 4.71 En un segmento con un arco de $120°$ y una altura h está inscrito el rectángulo $ABCD$ de manera que $AB : BC = 1 : 4$ (BC se halla sobre la cuerda). Encontrar el área del rectángulo.

Problema 4.72 El área de un anillo circular es igual a S. El radio de la circunferencia mayor es igual a la longitud de la menor. Hallar el radio de la circunferencia menor.

Problema 4.73 Expresar el lado de un decágono regular a través de R que es el radio de la circunferencia circunscrita.

Problema 4.74 Hacia una circunferencia de radio R desde el punto exterior M están trazadas las tangentes MA y MB que forman el ángulo. Determinar el área de la figura limitada por las tangentes y el arco menor de la circunferencia.

Problema 4.75 Viene dado el cuadrado $ABCD$ de lado a. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por el punto medio del lado AB, el centro del cuadrado y el vértice C.

Problema 4.76 Se da un rombo con el lado a y el ángulo agudo α. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por dos vértices vecinos del rombo y es tangente al lado opuesto del rombo o su prolongación.

Problema 4.77 Se dan tres circunferencias de radio r que son tangentes dos a dos. Hallar el área del triángulo formado por tres rectas, cada una de las cuales es tangente a dos circunferencias y no corta la tercera.

Problema 4.78 Cierta circunferencia tiene un punto de tangencia en M con una circunferencia de radio r. En esta recta, en ambos lados del punto M se toman los puntos A y B de manera que $MA = MB = a$. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por A y B y es tangente a la circunferencia dada.

Problema 4.79 Viene dado el cuadrado $ABCD$ cuyo lado es a. En su lado BC se toma el punto M de manera que $BM = 3MC$ y en el lado CD, el punto N de modo que $2CN = ND$. Hallar el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo AMN.

Problema 4.80 Se da el cuadrado $ABCD$ de lado a. Determina la distancia entre el punto medio del segmento AM, donde M es el punto medio de BC, y el punto N en el lado CD, que divide éste de tal manera, que $CN : ND = 3 : 1$.

Problema 4.81 Desde el vértice A del triángulo ABC sale una recta que divide por la mitad a la mediana BD (el punto D se halla sobre el lado AC). ¿En qué razón esta recta divide el lado BC?

Problema 4.82 El cateto AC del triángulo rectángulo ABC es igual a b, el cateto CB a a, CH es la altura, y AM la mediana. Hallar el área del triángulo BMH.

Problema 4.83 En el triángulo isósceles ABC $\angle A = 90°$ y $BC = a$. Hallar la distancia entre el punto de intersección de las alturas y el centro de la circunferencia circunscrita.

Problema 4.84 Alrededor del triángulo ABC, en el cual $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, está circunscrita una circunferencia. La bisectriz del ángulo A corta la circunferencia en el punto K. Hallar AK.

Problema 4.85 En una circunferencia de radio R está trazado el diámetro y sobre éste se toma el punto A a una distancia a de su centro. Hallar el radio de la segunda circunferencia que entra en contacto con el diámetro en el punto A y es tangente por el interior a la circunferencia dada.

Problema 4.86 Una circunferencia tiene trazadas tres cuerdas que se intersecan dos a dos. Cada cuerda está dividida por los puntos de intersección en tres partes iguales. Hallar el radio de la circunferencia, si una de las cuerdas es igual a a.

Problema 4.87 Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia, mientras que el otro está circunscrito alrededor de ésta. Hallar el radio de la circunferencia, si la diferencia de los perímetros de estos hexágonos es igual a a.

Problema 4.88 En el triángulo equilátero ABC, cuyo lado es igual a a, está trazada la altura BK. Los triángulos ABK y BCK tienen inscritas circunferencias, a las cuales está trazada la tangente exterior común distinta del lado AC. Hallar el área del triángulo cortado por esta tangente del triángulo ABC.

Problema 4.89 Los ángulos del cuadrilátero inscrito $ABCD$ son $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \kappa$, donde K es el punto de intersección de las diagonales. Hallar ACD.

Problema 4.90 Las diagonales del cuadrilátero inscrito $ABCD$ se intersecan en el punto K. Se sabe que $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$ y $CD = d$. Hallar AC.

Problema 4.91 Un trapecio está inscrito en una circunferencia. La base del trapecio forma con su lado el ángulo y con la diagonal, el ángulo . Hallar la razón entre el área del círculo y la del trapecio.

Problema 4.92 La base AD del trapecio isósceles $ABCD$ es igual a a, la base BC es igual a b, y $AB = d$. La recta trazada por el vértice B divide por la mitad la diagonal AC y corta a AD en el punto K. Hallar el área del triángulo BDK.

Problema 4.93 Hallar la suma de las distancias al cuadrado desde el punto M, tomado en el diámetro de cierta circunferencia, hasta los extremos de cualquiera de las cuerdas paralelas a este diámetro, si el radio de la circunferencia es igual a R y la distancia desde M hasta el centro de la circunferencia es igual a a.

Problema 4.94 Una cuerda común a dos circunferencias que se intersecan, se ve desde sus centros bajo los ángulos de 90° y 60°. Hallar los radios de las circunferencias, si la distancia entre sus centros es igual a a.

Problema 4.95 Viene dado el triángulo equilátero ABC. El punto K divide su lado AC en razón de $2:1$ y el punto M divide el lado AB en razón de $1:2$ (contando en ambos casos desde el vértice A). Demostrar que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Problema 4.96 Dos circunferencias con radios R y $\frac{R}{2}$ son tangentes exteriormente. Uno de los extremos de un segmento de longitud $2R$ forma con la línea de los centros un ángulo igual a $30°$ y coincide con el centro de la circunferencia de radio menor. ¿Qué parte del segmento se halla fuera de ambas circunferencias? (El segmento corta ambas circunferencias).

Problema 4.97 El triángulo ABC tiene trazadas la mediana BK, la bisectriz BE y la altura AD. Hallar la longitud del lado AC, si se sabe que las rectas BK y BE dividen al segmento AD en tres partes iguales y $AB = 4$.

Problema 4.98 La relación entre el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles y el radio de la circunferencia circunscrita alrededor de este mismo triángulo es igual a k. Hallar el ángulo contiguo a la base del triángulo.

Problema 4.99 Hallar el coseno del ángulo contiguo a la base de un triángulo isósceles, si el punto de intersección de sus alturas se halla en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Problema 4.100 Hallar el área del pentágono limitado por las rectas BC, CD, AN, AM y BD, donde A, B y D son tres vértices del cuadrado $ABCD$, N es el punto medio del lado BC y M divide el lado CD en razón de $2:1$ (calculando a partir del vértice C), si el lado del cuadrado $ABCD$ es a.

Problema 4.101 En el triángulo ABC se dan $\angle BAC = \alpha$ y $\angle ABC = \beta$. Una circunferencia con el centro en B pasa por A y corta a la recta AC en el punto K distinto de A, y a la recta BC, en los puntos E y F. Hallar los ángulos del triángulo AKF.

Problema 4.102 Viene dado un cuadrado con el lado a. Hallar el área de un triángulo equilátero, uno de cuyos vértices coincide con el punto medio de uno de los lados del cuadrado y los otros dos se encuentran en las diagonales del cuadrado.

Problema 4.103 En los lados del cuadrado $ABCD$ se toman los puntos M, N y K, donde M es el punto medio del lado AB, N se halla en el lado BC, y además $2BN = NC$, K pertenece al lado DA, con la particularidad de que $2DK = KA$. Hallar el seno del ángulo comprendido entre las rectas MC y NK.

Problema 4.104 Por los vértices A y B del triángulo ABC pasa una circunferencia de radio r que corta el lado BC en el punto D. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, D y C, si $AB = c$ y $AC = b$.

Problema 4.105 El lado AB del triángulo ABC es igual a 3 y la altura CD bajada sobre el lado AB es igual a 3. La base D de la altura CD se encuentra sobre el lado AB, el segmento AD es igual al lado BC. Hallar AC.

Problema 4.106 En una circunferencia de radio R está inscrito el hexágono regular $ABCDEF$. Hallar el radio del círculo inscrito en el triángulo ACD.

Problema 4.107 El lado AB del cuadrado $ABCD$ es igual a 1 y es la cuerda de cierta circunferencia, estando los otros lados del cuadrado fuera de esta circunferencia. La longitud de la tangente CK trazada desde el vértice C a la misma circunferencia es igual a 2. ¿A qué es igual el diámetro de la circunferencia ?

Problema 4.108 En un triángulo rectángulo el ángulo menor es α. Una recta que divide el triángulo en dos partes de áreas iguales, está trazada perpendicularmente a la hipotenusa. Determinar en que razón esta recta divide a la hipotenusa.

Problema 4.109 En el interior de un triángulo equilátero de lado igual a 1 se encuentran dos circunferencias que son tangentes entre sí y cada una de éstas es tangente a dos lados del triángulo (cada lado del triángulo es tangente por lo menos a una circunferencia). Demostrar que la suma de los radios de estas circunferencias no es menor de $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Problema 4.110 El triángulo rectángulo ABC con el ángulo agudo A igual a $30°$ tiene trazada la bisectriz BD del otro ángulo agudo. Hallar la distancia entre los centros de dos circunferencias inscritas en los triángulos ABD y CBD, si el cateto menor es igual a 1.

Problema 4.111 Los ángulos A y D del trapecio $ABCD$, contiguos a la base a la base AD son de $60°$ y $30°$, respectivamente. El punto N pertenece a la base, con la particularidad de que $BN : NC = 2$. El punto M se halla sobre la base AD, la recta MN es perpendicular a las bases del trapecio y divide su área en dos partes iguales. Hallar $AM : MD$.

Problema 4.112 En el triángulo ABC se dan $BC = a$, $\angle A = \alpha$ y $\angle B = \beta$. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente al lado BC, y a la que es tangente el lado AC en el punto A.

Problema 4.113 En el triángulo ABC, $AB = c$, $BC = a$ y $\angle B = \beta$. Sobre el lado AB se toma el punto M de manera que $2AM = 3MB$. Hallar la distancia desde M hasta el punto medio del lado AC.

Problema 4.114 En el lado AB del triángulo ABC se toma el punto M y en el lado AC el punto N, con la particularidad de que $AM = 3MB$ y $2AN = NC$. Hallar el área del cuadrilátero $MBCN$, si la del triángulo ABC es igual a S.

Problema 4.115 Se dan dos circunferencias concéntricas con los radios R y $r(R > r)$ y el centro común O. La tercera circunferencia es tangente a las dos primeras. Hallar la tangente del ángulo comprendido entre las tangentes que parten del punto O, hacia la tercera circunferencia.

Problema 4.116 En el paralelogramo $ABCD$, $AB = a$, $AD = b(b > a)$ y $BAD = \alpha$ $(\alpha < 90°)$. Los puntos K y M en los lados AD y BC se toman de manera que $BKDM$ sea un rombo. Hallar el lado del rombo.

Problema 4.117 La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c. Los centros de tres circunferencias de radio $\frac{c}{5}$ se encuentran en sus vértices. Hallar el radio de una cuarta circunferencia tangente a las tres dadas que no las contiene en su interior.

Problema 4.118 Hallar el radio de una circunferencia que en ambos lados del ángulo de magnitud α corta las cuerdas de longitud a, si se sabe que la distancia entre los extremos más próximos de estas cuerdas es igual a b.

Problema 4.119 El lado BC del triángulo ABC se toma como diámetro para trazar una circunferencia que corta a AB y AC en los puntos M y N Hallar el área del triángulo AMN, si la del triángulo ABC es igual a S y $BAC = \alpha$.

Problema 4.120 En una circunferencia de radio R están trazadas dos cuerdas mutuamente perpendiculares MN y PQ, Hallar la distancia entre los puntos M y P, si $NQ = a$.

Problema 4.121 Sobre el lado más grande $BC = a$ del triángulo ABC, se elige el punto M. Hallar la distancia mínima entre los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BAM y ACM.

Problema 4.122 En el paralelogramo $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$ y $\angle ABC = \beta$. Hallar la distancia entre los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BCD y DAB.

Problema 4.123 En el triángulo ABC, $\angle A = \alpha$, $AB = a$ y $AC = b$. En los lados AC y AB se toman los puntos M y N, donde M es el punto medio de AC. Hallar la longitud del segmento MN, si se sabe que el área del triángulo AMN representa una tercera parte de la del triángulo ABC.

Problema 4.124 Dos triángulos isósceles cuyos lados miden x, x, a y x, x, b, respectivamente, tienen igual área; $a \neq b$. Hallar x.

Problema 4.125 Sean A, B y C tres puntos no colineales y E un punto cualquiera que no pertenezca a la recta AC. Construya los paralelogramos $ABCD$ (en este orden) y$AECF$ (también en este orden). Demuestre que $BE|DF$.

Problema 4.126 Dado un cuadrado $ABCD$ de lado 1, y un cuadrado interior de lado x, hallar (en función de x) el radio de la circunferencia que es tangente a dos de los lados del cuadrado $ABCD$ y que pasa por un vértice del cuadrado interior.

Problema 4.127 En el cuadrado $ABCD$ se consideran las diagonales AC y BD. Sea P un punto cualquiera perteneciente a uno de los lados. Demostrar que la suma de las distancias de P a las dos diagonales es constante.

Problema 4.128 Sea P un punto fuera de la circunferencia $\mathcal{C}$. Encontrar dos puntos Q y R en la circunferencia tales que P, Q y R estén en línea recta y Q sea el punto medio del segmento PR. Discutir el número de soluciones.

Problema 4.129 En un triángulo ABC, sea E el pie de la altura desde A sobre BC. Demostrar que

$$AE = \frac{b \cdot c}{2r},$$

donde r es el radio de la circunferencia circunscrita, $b = AC$ y $c = AB$.

Problema 4.130 Sean A, B y C tres puntos pertenecientes a una circunferencia de centro O tales que $\angle AOB < \angle BOC$. Sea D el punto medio del arco AC que contiene a B. Sea K el pie de la perpendicular a BC por D. Pruebe que $AB + BK = KC$.

Problema 4.131 Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Sobre el lado AB se toma un punto D, de modo que $CD = k$, y los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ADC y CDB son iguales. Demostrar que el área del triángulo ABC es igual a k^2.

Problema 4.132 Sea $ABCD$ un rectángulo cuyos lados miden $AB = a$ y $BC = b$. Dentro del rectángulo se trazan dos circunferencias tangentes exteriormente de manera que una es tangente a los lados AB y AD y la otra es tangente a los lados CB y CD. Calcular la distancia entre los centros de las circunferencias en función de a yb.

Problema 4.133 En la situación del problema anterior, haciendo variar los radios de modo que la situación de tangencia se mantenga, el punto común de las circunferencias describe un lugar geométrico. Determinar este lugar geométrico.

Problema 4.134 La semicircunferencia de centro O y diámetro AC se divide en dos arcos AB y BC en la relación $1 : 3$. M es el punto medio del radio OC. Sea T el punto del arco BC tal que el área del cuadrilátero $OBTM$ es máxima. Calcular dicha área en función del radio.

Problema 4.135 Un cuadrado $ABCD$ se divide en dos cuadrados y tres rectángulos. El área de cada uno de los cuadrados es a y el área de cada uno de los dos rectángulos más pequeños es b. Si $a + b = 24$ y la raíz cuadrada de a es un número natural, hallar todos los valores posibles del área del cuadrado $ABCD$.

Problema 4.136 Sea ABC un triángulo acutángulo y CD la altura correspondiente al vértice C. Si M es el punto medio de BC y N es el punto medio de AD, calcular MN sabiendo que $AB = 8$ y $CD = 6$.

Problema 4.137 Sea C una circunferencia de centro O, AB un diámetro de ella y R un punto cualquiera en C distinto de A y de B. Sea P la instersección de la perpendicular trazada por O a AR. Sobre la recta OP se ubica Q, de manera que QP es la mitad de PO, Q no pertenece al segmento OP. Por Q trazamos la paralela a AB que corta a la recta AR en T. Llamamos H a la intersección de las rectas AQ y OT. Probar que H, R y B son colineales.

Problema 4.138 Considere un triángulo acutángulo ABC, y sea X un punto en el plano del triángulo. Sean M, N y P las proyecciones ortogonales de X sobre las rectas que contienen a las alturas del triángulo ABC. Determinar para qué posiciones de X el triángulo MNP es congruente con ABC. Nota: la proyección ortogonal de un punto X sobre una recta l es la intersección de l con la perpendicular a ella que pasa por X.

Problema 4.139 Sea ABC un triángulo. La bisectriz del ángulo CAB interseca a BC en D y la bisectriz del ángulo ABC interseca a CA en E. Si $AE + BD = AB$, demostrar que$BCA = 60°$.

Problema 4.140 Sean H el ortocentro (intersección de las alturas) del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio del lado BC. Sea X el punto en que la recta HM interseca el arco BC (que no contiene A) de la circunferencia circunscrita a ABC. Sea Y el punto de intersección de la recta BH con la circunferencia, distinto de B. Demuestre que $XY = BC$.

Problema 4.141 El triángulo ABC tiene $\angle C = 120°$ y el lado AC mayor que el lado BC. Sabiendo que el área del triángulo equilátero de lado AB es 31 y el área del triángulo equilátero de lado $AC - BC$ es 19, hallar el área del triángulo ABC.

Problema 4.142 En el cuadrado $ABCD$, sean P en el lado AB tal que $AP^2 = BP \cdot BC$ y M el punto medio de BP. Si N es el punto interior del cuadrado tal que $AP = PN$ y MN es paralelo a BC, calcular la medida del ángulo $\angle BAN$.

Problema 4.143 Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Construir el punto P en la hipotenusa BC, tal que si Q es el pie de la perpendicular trazada desde P al cateto AC, entonces el área del cuadrado de lado PQ es igual al área del rectángulo de lados iguales a PB y PC. Mostrar los pasos de la construcción.

Problema 4.144 Lucas dibuja un segmento AC y Nicolás marca un punto B del interior del segmento. Sean P y Q puntos en un mismo semiplano respecto de AC tales que los triángulos APB y BQC son isósceles en P y Q, respectivamente, con $APB = BQC = 120°$. Sea R el punto del otro semiplano tal que el triángulo ARC es isósceles en R, con $ARC = 120°$. Se traza el triángulo PQR. Demostrar que este triángulo es equilátero.

Problema 4.145 Sean el cuadrado $ABCD$ (sentido horario) y P un punto cualquiera perteneciente al interior del segmento BC. Se construye el cuadrado $APRS$ (sentido horario). Demostrar que la recta CR es tangente a la circunferencia circunscripta al triángulo ABC.

Problema 4.146 Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Se consideran D en la hipotenusa AB tal que CD es altura del triángulo, y E en el cateto BC tal que AE es bisectriz del ángulo $\angle A$. Si F es el punto de intersección de AE y CD, y G es el punto de intersección de ED y BF, demostrar que

$$\acute{a}rea(CEGF) = \acute{a}rea(BDG).$$

Problema 4.147 Sea ABC un triángulo isosceles con $AB = AC$ y $A = 36$. Se traza la bisectriz de B que corta a AC en D y se traza la bisectriz de BDC que corta a BC en P. Se marca un punto R en la recta BC tal que B es el punto medio del segmento PR. Explique por qué los segmentos RD y AP tienen la misma medida.

Problema 4.148 Sea un rectángulo $ABCD$ y sea P un punto cualquiera de la diagonal AC. Se traza por P una recta paralela a BC que corta a AB en R y a DC en S; y se traza por S una paralela a AC que corta a AD en T. Calcular la razón entre las areas de las figuras $TSPA$ y PRB.

Problema 4.149 En un cuadrado $ABCD$ de área 1, E es el punto medio de DC, G es el punto medio de AD, F es el punto del lado BC tal que $3CF = FB$ y O es el punto de intersección entre

FG y AE. Encontrar el área del triángulo EFO.

Problema 4.150 Sea $ABCD$ un tetraedro regular, P y Q puntos distintos en los planos BCD y ACD respectivamente. Demostrar que existe un triángulo cuyos lados miden AP, PQ y QB.

Problema 4.151 Las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes interiormente a la circunferencia $\mathcal{C}$ en los puntos A y B, respectivamente. La tangente interior común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ toca a estas circunferencias en P y Q, respectivamente. Demostrar que las rectas AP y BQ intersecan a la circunferencia $\mathcal{C}$ en puntos diametralmente opuestos

Problema 4.152 En un trapecio $ABCD$ de bases AB y CD se eligen los puntos M y N en los lados AD y BC, respectivamente, de modo que $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$. Si MN interseca a las diagonales AC y BD en P y Q, respectivamente, demuestre que $MP = NQ$.

Problema 4.153 Sea $ABCD$ un cuadrado. En el semiplano determinado por AC que contiene a B se escoge un punto P tal que $\angle APC = 90°$ y $\angle PAC > 45°$. Sean Q el punto de corte de PC con AB y H el pie de la altura correspondiente a Q en el triángulo AQC. Demuestre que los puntos P,H y D están alineados.

Problema 4.154 Sea AB un segmento con punto medio M. Sobre la mediatriz de AB se toma un punto O tal que $OM = AM$. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O y radio menor que OM. Por A se traza la recta AP tangente a $\mathcal{C}$ en P y que no corta al segmento OM. Por B se traza la recta BQ tangente a $\mathcal{C}$ en Q y que corta al segmento OM. Demostrar que AP y BQ son perpendiculares.

Problema 4.155 Considere dos puntos A y B en el plano y l una recta tal que A y B se encuentran en un mismo semiplano determinado por l. Sean C tal que A y C son simétricos con respecto a la recta l, D el pie de la perpendicular de B a l, y s la mediatriz de BC. La circunferencia de diámetro BC interseca a s en E y F. Sean G y H las intersecciones de l con los segmentos CE y CF, respectivamente. Demuestre que se cumple la siguiente relación entre las medidas de los ángulos: $\angle AGC = 2\angle BGE$ y $\angle AHC = 2\angle BHF$.

Problema 4.156 Sean ABC un triángulo y D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean D', E' y F' los puntos simétricos a D, E y F con respecto de los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Demuestre que si el triángulo DEF es congruente al triángulo $D'E'F'$ y los siguientes ángulos son iguales: $\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$ y $\angle F = \angle F'$, entonces el triángulo DEF es semejante al triángulo ABC.

Problema 4.157 Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno cuyo ortocentro es H. M es el punto medio del segmento BC. N es el punto donde se intersecan el segmento AM y la circunferencia determinada por B, C y H. Demuestre que las rectas HN y AM son perpendiculares.

Problema 4.158 Sean ABC un triángulo isósceles ($AC = BC$) y P el punto del lado BC tal que $\frac{PC}{BP} = 4$. Se prolonga el lado CA y sobre esa prolongación se marca el punto Q tal que $QA = BP$. El segmento PQ interseca a la base AB en el punto R. Hallar $\frac{AR}{AB}$.

Problema 4.159 Sean C y C' circunferencias tangentes interiores, de centros O y $O\prime$, y radios R y r respectivamente ($R > r$).

Problema 4.160 La perpendicular por $O\prime$ a la recta $OO\prime$ interseca a C en P y Q.

Problema 4.161 Sea M un punto de la recta OO' y en el interior de C tal que MP y MQ son tangentes a C'. Sabiendo que el ángulo $PMQ = 90°$, calcular $\frac{R}{r}$.

Problema 4.162 Dadas una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y una circunferencia $\mathcal{C}'$ que pasa por O y corta a $\mathcal{C}$ en A y B, sea C (distinto de O) un punto de $\mathcal{C}'$ que está en el interior de la circunferencia $\mathcal{C}$. La recta AC corta nuevamente a la circunferencia $\mathcal{C}$ en D. Demostrar que $CB = CD$.

Problema 4.163 Dados tres puntos no alineados A, B y C, construir una circunferencia con centro en C tal que una de las tangentes trazadas desde A sea paralela a una de las tangentes trazadas desde B. Indicar los pasos de la construcción.

Problema 4.164 En el triángulo ABC, el ángulo $B = 60°$, el ángulo $C = 55°$ y M es el punto medio del lado BC. Sea P en el lado AC tal que el cuadrilátero $ABMP$ y el triángulo PMC tienen igual perímetro. Hallar la medida del ángulo MPC.

Problema 4.165 Sean ABC un triángulo, E el punto medio AC y O el punto medio de BE. La recta AO interseca al lado BC en D. Si $AO = 12$, calcular OD.

Problema 4.166 Los cuatro lados de un trapecio isósceles son tangentes a una circunferencia y los puntos de tangencia son vértices de un cuadrilátero cuya área es $\frac{4}{9}$ del área del trapecio. Si a es la base menor del trapecio y b es la base mayor del trapecio, hallar $\frac{a}{b}$.

Problema 4.167 El paralelogramo $ABCD$ tiene el ángulo $\angle BAD$ agudo y el lado AD menor que el lado AB. La bisectriz del ángulo $\angle BAD$ corta al lado CD en E. Se traza por D una perpendicular a AE que corta a AE en P, y se traza por E una perpendicular a AE que corta al lado BC en Q. Sabiendo que PQ es paralelo a AB y que $AB = 20$, calcular la medida del lado AD.

Problema 4.168 En una circunferencia se consideran cuatro puntos distintos, A, B, C y D, tales que AD es diámetro, y se traza la recta tangente por D. Sean P el punto de intersección de la recta AB con la tangente y Q el punto de intersección de la recta AC con la tangente. Si $AB = 46.08$, $AC = 28.8$ y $BP = 3.92$, calcular la medida del segmento CQ.

Problema 4.169 Sea P un punto en el interior del triángulo ABC. Se trazan por P las paralelas a los lados del triángulo, que queda dividido en tres triángulos y tres paralelogramos. Si las áreas de los tres triángulos de la subdivisión son, en algún orden, 9, 16 y 25, hallar el área del triángulo ABC.

Problema 4.170 Sea $MNOP$ un cuadrado de lados $MN = NO = OP = PM = 1$. Consideramos la circunferencia de centro O y radio 1. La recta MO interseca a la circunferencia en los puntos K, interior al cuadrado, y L, exterior al cuadrado. La recta LP interseca a la prolongación del lado NM en S. Hallar el área del triángulo KMS.

Problema 4.171 Los triángulos rectángulos ABC y ABD están inscriptos en la misma semicircunferencia de diámetro $AB = 15$. Se traza por D la perpendicular a AB que interseca a AB en P, al lado AC en Q y a la prolongación del lado BC en R. Si $PR = 40/3$ y $PQ = 15/4$, hallar la medida de DP.

Problema 4.172 Sea ABC un triángulo rectángulo con $ABC = 90°$, $BC = 72$ y $AC = 78$. Se considera D en el lado AB tal que $2AD = BD$. Si O es el centro de la circunferencia que es tangente al lado BC y pasa por A y D, calcular la medida de OB.

Problema 4.173 Dado un triángulo ABC, con $BC < AC$, sea K el punto medio de AB y L el punto del lado AC tal que $AL = LC + CB$. Demostrar que si $KLB = 90°$ entonces $AC = 3CB$ y recíprocamente, si $AC = 3CB$ entonces $KLB = 90°$.

Problema 4.174 Sean una circunferencia de centro O y un paralelogramo $ABCD$ tales que A, B y C pertenecen a la circunferencia y O pertenece al lado AD. Las rectas AD, CD y BO cortan nuevamente a la circunferencia en K, M y N respectivamente. Demostrar que los segmentos NK, NM y ND son iguales entre sí.

Problema 4.175 Un trapecio inscrito en una circunferencia de radio r tiene tres lados de longitud s y el cuarto de longitud $r + s$, con $s < r$. Hallar las medidas de los ángulos del trapecio.

Problema 4.176 En el triángulo rectángulo ABC, $B = 90°$, $AB = 3$, $BC = 4$ y $AC = 5$. Sea O el baricentro del triángulo, es decir, el punto de intersección de las medianas y sean A', B' y C' puntos en los lados BC, AC y AB respectivamente, tales que OA' es perpendicular a BC, OB' es perpendicular a AC y OC' a AB. Hallar el área del triángulo $A'B'C'$.

Problema 4.177 El hexágono no regular $ABCDEF$ está inscrito en una circunferencia de centro O y $AB = CD = EF$. Si las diagonales AC y BD se cortan en M, las diagonales CE y DF se cortan en N y las diagonales AE y BF se cortan en K, demostrar que las alturas del triángulo MNK se cortan en O.

Problema 4.178 Sea $ABCD$ un paralelogramo de lados AB, BC, CD, DA y centro O tal que $BAD < 90°$ y $AOB > 90°$. Consideremos A_1 y B_1 puntos de las semirrectas OA y OB respectivamente, tales que A_1B_1 es paralelo a AB y $\angle A_1B_1C = \frac{\angle ABC}{2}$. Demostrar que A_1D es perpendicular a B_1C.

Problema 4.179 Dados en el plano dos segmentos no paralelos AB y CD, hallar el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el área del triángulo ABP es igual al área del triángulo CDP.

Problema 4.180 Sea un cuadrilátero $ABCD$ que posee una circunferencia inscrita y sean K, L, M y N los puntos de tangencia de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. En cada uno de los triángulos AKN, BLK, CML y DNM se considera el punto de intersección de las alturas (es decir, el ortocentro del triángulo). Demostrar que estos cuatro puntos son los vértices de un paralelogramo.

Problema 4.181 En un cuadrilátero convexo $ABCD$ de lados AB, BC, CD y DA se consideran un punto M del lado AB y un punto N del lado CD tales que $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Los segmentos MD y AN se intersecan en P, los segmentos NB y CM se intresectan en Q. Demostrar que

$$\acute{a}rea(MQNP) = \acute{a}rea(APD) + \acute{a}rea(BQC).$$

Problema 4.182 Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias tangentes exteriores, de centros O_1 y O_2, respectivamente. Se trazan por O_1 las dos tangentes a la circunferencia $\mathcal{C}_2$, que intersecan a $\mathcal{C}_1$ en P y P'. Se trazan por O_2 las dos tangentes a la circunferencia $\mathcal{C}_1$, que intersecan a $\mathcal{C}_2$ en Q y Q'. Demostrar que el segmento PP' es igual al segmento QQ'.

Problema 4.183 Dado un triángulo ABC con el lado AB mayor que el BC, sean M el punto medio de AC y L el punto en el que la bisectriz del ángulo B corta al lado AC. Se traza por M la recta paralela a AB, que corta a la bisectriz BL en D, y se traza por L la recta paralela al lado BC que corta a la mediana BM en E. Demostrar que ED es perpendicular a BL.

4.3. Áreas

En la sección anterior se mostraron varias maneras de calcular el área de un triángulo. Sin embargo, a la hora de resolver problemas lo que muchas veces se necesita no es el área de un solo triángulo, sino encontrar relaciones entre las de varios. Hoy veremos algunos trucos útiles que sirven para encontrar fácilmente tales relaciones, sin pasar por el cálculo explícito de las áreas. Todos están basados en el siguiente resultado, en apariencia bobo e inocente:

Si un triángulo Δ_1 tiene base b y altura correspondiente h, y otro triángulo Δ_2 tiene base B y altura correspondiente H, entonces

$$\frac{\text{área}\,\Delta_1}{\text{área}\,\Delta_2} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}BH} = \frac{b}{B}\cdot\frac{h}{H},$$

es decir, la razón entre las áreas es el producto de la razón entre las bases y la razón entre las alturas.

A partir de esto podemos deducir varios resultados interesantes y útiles (¡pruébalos!):

(1) Si dos triángulos tienen bases iguales, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus alturas.

(2) Si dos triángulos tienen alturas iguales, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases.

(3) Una mediana divide a un triángulo en dos triángulos de la misma área.

(4) Sean ABC y ABC' dos triángulos tales que C y C' están del mismo lado de la recta AB. Entonces, ABC y ABC' tienen la misma área si y sólo si CC' es paralela a AB.

(5) Dados dos triángulos semejantes, la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza. Este resultado sigue siendo cierto para polígonos con más de tres lados. ¿Por qué?

Estos resultados sobre áreas se pueden generalizar a paralelogramos, puesto que el área de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura. ¿Cuáles son esas generalizaciones?

Ahora resolvamos unos cuantos problemas sencillos. **ADVERTENCIA:** muchos de los problemas de esta lista pueden ser resueltos por otros métodos, pero la idea de este entrenamiento es usar los resultados enunciados arriba para probarlos.

Problema 4.184 Demuestra que si desde un punto arbitrario de una diagonal de un paralelogramo se trazan segmentos a los otros dos vértices, entonces se forman dos pares de triángulos con la misma área.

Problema 4.185 Sean $ABCD$ un paralelogramo y P el punto de intersección de sus diagonales. Demuestra que cualquier recta que pasa por P divide al paralelogramo en dos regiones con áreas iguales.

Problema 4.186 Sean $ABCD$ un paralelogramo y E y F los puntos medios de los lados AB y BC, respectivamente. Prueba que los triángulos AED y DFC tienen la misma área.

Problema 4.187 Sean $ABCD$ y $DEFG$ dos paralelogramos tales que E está sobre el lado AB y C está sobre el lado FG. Demuestra que ambos paralelogramos tienen la misma área.

Problema 4.188 En un trapecio $ABCD$ con AB paralela a CD, sea P el punto de intersección de las diagonales. Prueba que los triángulos APD y BPC son equivalentes.

Problema 4.189 Prueba que en todo trapecio, los dos triángulos cuyos respectivos vértices son el punto medio de uno de los lados no paralelos y los extremos del otro, tienen la misma área.

Problema 4.190 Demuestra que el área de un trapecio es igual a la suma de las áreas de los triángulos cuyos vértices son el punto medio de uno de los lados paralelos y los extremos del otro.

Problema 4.191 Sean $ABCD$ un trapecio con AB paralela a CD, y L, M y O los puntos medios de los segmentos AD, BC y LM, respectivamente. Supongamos que una recta que pasa por O corta a los lados AB y CD en P y Q, respectivamente. Prueba que $LPMQ$ es un paralelogramo y que el segmento PQ divide al trapecio original en dos trapecios de la misma área.

Problema 4.192 Sea X cualquier punto entre B y C en el lado BC del cuadrilátero $ABCD$. Una línea es dibujada por B paralela a AX y otra línea es dibujada por C paralela a DX. Esas dos líneas se intersecan en P. Prueba que el área del triángulo APD es igual al área del cuadrilátero $ABCD$.

Problema 4.193 Sea ABC un triángulo y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con el lado BC y el circuncírculo de ABC, respectivamente. Sea M la intersección del segmento AC con el circuncírculo de ABL. Prueba que los triángulos BMN y BMC tienen la misma área.

Problema 4.194 Dos circunferencias que se cortan en M y N tienen una tangente común que es tangente a una circunferencia en P y a la otra en Q. Demuestra que los triángulos MNP y MNQ tienen la misma área.

Un truco bastante útil, no solamente en problemas de áreas sino en muchos otros, pero poco apreciado, es el siguiente:

$$\text{Si } \tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d}, \text{ entonces } \tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} = \tfrac{a+c}{b+d} = \tfrac{a-c}{b-d}.$$

Prueba el susodicho resultado y úsalo junto con propiedades de áreas para resolver los siguientes problemas:

Problema 4.195 Prueba el teorema de Menelao.

Problema 4.196 Sean ABC un triángulo y L, M y N puntos sobre los **segmentos** BC, AC y AB respectivamente tales que las rectas AL, BM y CN son concurrentes. Prueba que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Algunos problemas de nacionales que pueden ser resueltos con estas estrategias son: problema 5, XI OMM; problema 5, IX OMM; problema 3, XIII OMM. (Para los enunciados, ver el capítulo de exámenes, sección de nacionales).

Capítulo 5

Temas diversos

5.1. Lógica

Esta sección no necesita introducción. La idea es solamente resolver algunos problemas de lógica, aunque las etapas avanzadas de la olimpiada de matemáticas no incluyan problemas así, por lo beneficioso que resulta pensar ordenadamente para resolver cualquier problema.

Problema 5.1 La mamá de Pedro dijo: “Todos los campeones son buenos en matemáticas”. Pedro dice: “Yo soy bueno en matemáticas. Por lo tanto, soy un campeón”. ¿Esta implicación es correcta o incorrecta?

Problema 5.2 Supongamos que las siguientes afirmaciones son verdaderas:
a) De entre las personas que tienen televisión hay algunas que no son matemáticos.
b) Los no matemáticos que nadan en albercas todos los días no tienen televisiones.
¿Es cierto que no toda la gente que tiene televisión nada todos los días?

Problema 5.3 Los siguientes problemas toman lugar en una isla donde todos los habitantes son *sinceros*, es decir siempre dicen la verdad, o *mentirosos*, es decir siempre mienten:
a) La persona A dijo: “yo soy un mentiroso”. ¿Es él un habitante de la isla?
b) ¿Qué pregunta le harías a un isleño para saber adónde lleva cierto camino, a la ciudad de los sinceros o a la ciudad de los mentirosos?
c) ¿Qué pregunta le harías a un isleño para saber si tiene un cocodrilo?
d) Supongamos que en el lenguaje de la isla las palabras “sí” y “no” suenan como “flip” y “flop”, pero nosotros no sabemos cual es cual. ¿Qué pregunta le harías a un isleño para saber si es un mentiroso o un sincero?
e) ¿Qué pregunta le harías a un isleño de tal forma que la respuesta siempre sea “flip”?
f) Un isleño A, en presencia de otro isleño B, dijo: “al menos uno de nosotros es un mentiroso”. ¿Es A un sincero o un mentiroso? ¿Qué es B?
g) Hay tres personas A, B y C. Entre ellos hay un sincero, un mentiroso y un extraño (una persona normal), que algunas veces miente y otras dice la verdad.

A dijo: "Yo soy una persona normal".
B dijo: "A y C algunas veces dicen la verdad".
C dijo: "B es una persona normal".
De entre ellos, ¿quién es el sincero, quién el mentiroso y quién es normal?
h) Varios isleños están en una conferencia. Cada uno de ellos le dijo a los otros: "todos ustedes son mentirosos". ¿Cuántos sinceros puede haber en la conferencia?

5.2. Paridad

Decimos que un número entero es par si éste es divisible entre dos, y que es impar si no es par. Este concepto, a pesar de su simplicidad, aparece en la solución de todo tipo de problemas y resulta ser muy útil para resolverlos, incluyendo algunos que son realmente difíciles.

Debido precisamente a la gran simplicidad de este tema, podemos resolver problemas interesantes sin necesidad de muchos conocimientos previos.

Problema 5.4 Siete engranes están acomodados en una cadena como se muestra en la siguiente figura. ¿Pueden todos los engranes rotar simultáneamente? Explica tu respuesta.

Solución. La respuesta es no. Numeremos los engranes sucesivamente del 1 al 7 empezando por cualquiera de ellos. El primer engrane debe girar en algún sentido, digamos que en el de las manecillas del reloj. Entonces el segundo engrane debe girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el tercero en el sentido de las manecillas del reloj y así sucesivamente. Resulta claro entonces que los engranes "impares" deben girar todos en la misma dirección, y los engranes "pares" deben girar todos en la otra dirección. Pero entonces el primero y el séptimo engranes, que son adyacentes, deben girar en la misma dirección, lo cual es imposible.

Observación. Como en el caso del problema anterior, muchos problemas que se resuelven utilizando argumentos de paridad tienen que ver con situaciones imposibles. Por ello, cuando en un problema se pide determinar si algo es posible o no, generalmente la respuesta es no.

Problema 5.5 Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamientos de 3, 5 y 7 kilómetros. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 kilómetros. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones?

Problema 5.6 Un saltamontes brinca a lo largo de una línea. En su primer brinco salta 1 cm., en el segundo 2 cm., y así sucesivamente. En cada salto él puede ir a la izquierda o a la derecha. Muestre que después de 2001 saltos, el saltamontes no puede regresar al punto de partida.

Problema 5.7 ¿Se puede intercalar símbolos "+" o "−" entre los números

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$$

de manera que la suma sea 13?

Problema 5.8 ¿Se puede dibujar un camino cerrado a base de nueve segmentos, cada uno de los cuales interseque a exactamente uno de los otros segmentos?

Problema 5.9 Un camino cerrado está hecho de 11 segmentos de línea. ¿Puede una línea que no contenga a ningún vértice del camino intersecar a cada uno de sus segmentos?

Problema 5.10 Las 28 fichas de dominó están acomodadas en una cadena, de manera que el número de puntos en los extremos unidos de un par de fichas adyacentes coinciden. Si uno de los extremos de la cadena es un número 5, ¿cuál es el número en el otro extremo de la cadena?

Problema 5.11 Pedro compró un cuaderno que contiene 96 hojas y numeró sus páginas del 1 al 192. Víctor desprende 25 hojas del cuaderno de Pedro y después suma los 50 números escritos en las páginas. ¿Puede Víctor obtener 1990 como la suma?

Problema 5.12 El producto de 22 enteros es igual a 1. Muestra que su suma no puede ser cero.

Problema 5.13 Se escogen 45 puntos a lo largo de una línea AB, todos ellos fuera del segmento AB. Prueba que la suma de las distancias desde esos puntos al punto A no puede ser igual a la suma de las distancias desde esos puntos al punto B.

Problema 5.14 Prueba que la ecuación $1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f=1$ no tiene soluciones en los números naturales impares.

Problema 5.15 Se colocan ocho torres en un tablero de ajedrez de modo que ninguna de ellas ataca a ninguna de las otras. Prueba que el número de torres colocadas sobre cuadros negros es par.

Problema 5.16 ¿Es posible colocar 20 peones rojos y azules alrededor de un círculo de modo que en el lugar opuesto a cada peón rojo haya uno azul, y no haya dos peones azules vecinos?

Problema 5.17 En una línea recta se eligen los puntos A y B. Después se eligen otros 1001 puntos fuera del segmento AB, los cuales se colorean de rojo y azul. Prueba que la suma de las distancias de A a los puntos rojos y de B a los puntos azules no es igual a la suma de las distancias de B a los puntos rojos y de A a los puntos azules.

Problema 5.18 Se tienen diez pares de cartas con los números $0,0,1,1,\ldots,8,8,9,9$ escritos en ellas. Prueba que éstas no pueden ser ordenadas en una hilera de modo que entre las dos cartas marcadas con n haya exactamente n cartas (para $n=0,1,2,\ldots,9$).

Problema 5.19 Sobre una circuferencia se eligen 20 puntos que forman un 20-ágono regular. Los puntos son separados en 10 parejas, y los dos puntos de cada pareja se unen con una cuerda. Prueba que dos de estas cuerdas tienen la misma longitud.

Problema 5.20 Se cubre un cuadrado de 6×6 con dominós de 1×2 sin que éstos se traslapen. Prueba que se puede cortar el cuadrado con una línea paralela a uno de sus lados sin dañar ninguno de los dominós.

Problema 5.21 Una serpiente comienza a arrastrarse sobre un plano, iniciando en un punto O, siempre con la misma velocidad y dando un giro de $60°$ cada media hora. Prueba que la serpiente puede regresar al punto O únicamente después de un número entero de horas.

5.3. Coloraciones

A diferencia de la paridad o algunos otros temas que veremos, las coloraciones no son un concepto matemático claramente definido, sino una técnica para resolver problemas. Por ello, es más fácil ilustrar de qué se trata esto resolviendo un problema:

Problema 5.22 ¿Puede un tablero de ajedrez ser cubierto por fichas de dominó de tal manera que solamente las dos casillas de dos esquinas opuestas resulten descubiertas?

Solución. La respuesta es que no. Lo más importante para poder resolver este problema es no olvidar que lo que tenemos es un tablero de ajedrez, y no cualquier cuadrícula de 8×8. ¿Qué tiene de particular un tablero de ajedrez? Que sus casillas están *coloreadas*: hay 32 blancas y 32 negras. Notemos que, debido a la forma como están coloreadas las casillas del tablero, cada vez que colocamos una ficha de dominó sobre éste, ésta cubre siempre una casilla negra y una blanca. Pero las casillas que se encuentran en dos esquinas opuestas del tablero tienen siempre el mismo color, así que, sin contar estas esquinas, nos quedan por cubrir 30 casillas de un color y 32 del otro, lo cual no se puede hacer con fichas de dominó puesto que ya vimos que cada una cubre siempre una casilla blanca y una negra.

Observación. Como en el caso de los problemas de paridad, los problemas de coloraciones muchas veces preguntan si algo es posible o no, y casi siempre la respuesta es no. En este primer problema las casillas ya estaban coloreadas, pero en otros las casillas estarán "en blanco" y tú tendrás que proponer una coloración que te sea útil para resolver el problema. De hecho, en algunos problemas ni siquiera será claro qué cosa son las casillas.

Problema 5.23 Demuestra que un tablero de ajedrez de 10×10 no puede ser cubierto con 25 tetraminós rectos.

Problema 5.24 Demuestra que un tablero de ajedrez de 8×8 no puede ser cubierto con 15 tetraminós "T" y un tetraminó cuadrado.

Problema 5.25 ¿Puede un caballo empezar en la casilla a1 (esquina inferior izquierda) y terminar en la casilla h8 (esquina superior derecha) visitando cada una de las casillas restantes del tablero de ajedrez solamente una vez?

Problema 5.26 Un piso rectangular es cubierto por mosaicos de 2×2 y de 1×4. Uno de estos mosaicos se rompió y hay uno nuevo disponible del otro tipo. Muestra que no importa como se arreglen los mosaicos, no se puede sustituir el roto por el nuevo.

5.4. Principio de las casillas

El principio de las casillas tiene la cualidad de permitirnos decir algo acerca de una situación, sin conocer bien la situación. El susodicho principio puede ser enunciado como sigue:

Si se tienen $nk+1$ objetos de n clases, al menos una de las clases tiene al menos $k+1$ objetos.

Un modo un poco menos abstracto: Si se tienen $nk+1$ pelotas a acomodar en n cajas, al menos una de las cajas tiene al menos $k+1$ pelotas.

Resuelve los siguientes problemas indicando qué representa las "pelotas" y qué las "cajas".

Problema 5.27 Una bolsa contiene bolas de dos colores: blanco y negro. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que hay que extraer de la bolsa, para garantizar que hay dos del mismo color? ¿Y para 10 del mismo color?

Problema 5.28 Un millón de pinos crecen en el bosque. Se sabe que ningún pino tiene más de 600,000 agujas. Prueba que en el bosque hay dos pinos que tienen el mismo número de agujas. ¿Puedes asegurar que hay 3?

Problema 5.29 Dados 12 enteros, prueba que se pueden escoger 2 de tal forma que su diferencia sea divisible entre 11.

Problema 5.30 La ciudad de México tiene más de 15 millones de personas. Prueba que deberá haber al menos 16 personas que tienen la misma cantidad de cabellos. Nota: Es conocido que toda persona tiene menos de 1 millón de cabellos.

Problema 5.31 25 cajas de manzanas son compradas en una tienda. Las manzanas son de tres tipos distintos y todas las manzanas de cada caja son del mismo tipo. Prueba que de entre las cajas hay al menos 9 que contienen el mismo tipo de manzanas.

Problema 5.32 Dados 8 números todos ellos distintos y no mayores que 15, prueba que al menos 3 parejas de ellos tienen la misma diferencia positiva (las parejas no necesariamente son disjuntas).

Problema 5.33 Prueba que en cualquier grupo de 5 personas, hay al menos 2 que tienen el mismo número de amigos en el grupo.

Problema 5.34 Una cierta cantidad de equipos de futbol entran a un torneo en el cual cada equipo juega con otro equipo exactamente una vez. Prueba que en algún momento durante el torneo existen dos equipos que han jugado, hasta ese momento, el mismo número de juegos.

Problema 5.35 ¿Cuál es el máximo número de cuadros que se pueden colorear en un tablero de ajedrez de tal forma que al colocar una ficha de triminó en cualquier parte del tablero, al menos uno de los cuadros cubiertos por la ficha de triminó no esté coloreado?

Problema 5.36 ¿Cuál es el máximo número de reyes que se pueden acomodar en un tablero de ajedrez de tal forma que no se ataquen uno a otro?

Problema 5.37 Diez estudiantes resolvieron un total de 35 problemas en la olimpiada de matemáticas. Cada problema fue resuelto por exactamente un estudiante. Hay al menos un estudiante que resolvió exactamente un problema, al menos uno que resolvió exactamente dos problemas y al menos uno que resolvió exactamente tres problemas. Prueba que hay al menos un estudiante que resolvió al menos cinco problemas.

Problema 5.38 Prueba que si colocamos cinco puntos en un triangulo equilátero de lado dos existen dos a distancia menor o igual a 1.

Problema 5.39 Prueba que un triangulo equilátero no puede ser cubierto completamente con dos triángulos equiláteros menores.

Problema 5.40 51 puntos han sido puestos en un cuadrado de lado 1 metro. Prueba que existen tres de esos puntos que pueden ser cubiertos por un cuadrado de lado 20 centímetros.

Problema 5.41 En un papel cuadriculado de 6×9 cuadros se consideran 25 triángulos arbitrarios y diferentes que tienen sus vértices en los puntos de intersección de las líneas de la cuadricula. Mostrar que no importa como se elijan los triángulos, forzosamente habrá (al menos) dos triángulos con un vértice en común.

Problema 5.42 Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 3×7 se pintan de negro y otros se dejan de blanco. Probar que forzosamente las líneas de la cuadrícula forman un rectángulo en cuyas cuatro esquinas los cuadritos tienen el mismo color (los cuatro blancos o los cuatro negros).

Problema 5.43 Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 19×4 se pintan de rojo, otros de azul y otros de verde (no se deja ninguno en blanco). Probar que forzosamente las líneas de la cuadricula forman un rectángulo cuyas cuatro esquinas tienen el mismo color.

Problema 5.44 Probar que en cualquier conjunto de seis personas forzosamente hay tres que se conocen todas entre sí o tres tales que ninguna conoce a ninguna de las otras dos.

Problema 5.45 En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente diez cuadritos y se han marcado los centros de éstos. El lado de cada cuadrito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados por una distancia menor o igual a $\sqrt{2}$ o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia de $1/2$ de la orilla de la cuadrícula. (Problema 4, XIII OMM)

Problema 5.46 Cien personas están sentadas en una mesa redonda. Más de la mitad de ellas son hombres. Prueba que existen dos hombres que están sentados diametralmente opuestos.

Problema 5.47 Todos los puntos de una línea recta se colorean con 11 colores. Prueba que es posible encontrar dos puntos del mismo color que estén separados por un número entero de centímetros.

Problema 5.48 Hay siete líneas rectas en un plano. Prueba que hay dos de ellas que forman un ángulo menor a $26°$.

Problema 5.49 Se colorea cada casilla de un tablero de 5×41 ya sea de blanco o de negro. Prueba que es posible elegir tres columnas y tres filas de modo que las 9 casillas en las que se intersecan sean todas del mismo color.

Problema 5.50 Seis amigos decidieron ir a siete cines diferentes durante el fin de semana. Las funciones comenzaban cada hora, desde las 9 am hasta las 7 pm. Cada hora dos de ellos entraban a uno de los cines, y todos los demás iban a un cine diferente. Al final de cada día cada uno de ellos había visitado los siete cines. Prueba que para todo cine hubo una función a la cual no asistió ninguno de los amigos.

Problema 5.51 Cada punto de un plano es coloreado usando a) 2; b) 3; c) 100 colores. Prueba que se puede encontrar un rectángulo con todos sus vértices del mismo color.

Problema 5.52 ¿Cuál es el número máximo de arañas que pueden coexistir pacíficamente en las aristas de un cubo de arista igual a 1 m? Una araña tolera a una vecina únicamente a una distancia de a) 1 m; b) 1.1 m (medidas sobre las aristas).

Problema 5.53 Se tienen dos 16-ágonos regulares, y en cada uno se eligen siete vértices. Prueba que los dos 16-ágonos pueden ser superpuestos de modo que al menos cuatro de los vértices elegidos en uno de los 16-ágonos coincidan con vértices elegidos en el otro 16-ágono.

Problema 5.54 Hay 25 puntos en el plano, colocados de manera que entre cualesquiera tres de ellos hay dos que distan a lo más 1 cm entre sí. Prueba que es posible dibujar un cículo de radio 1 cm que cubra a 13 de estos puntos.

Problema 5.55 Se eligen seis puntos en un rectángulo de 3×4. Prueba que hay dos de ellos que están separados por una distancia de a lo más $\sqrt{5}$.

Problema 5.56 Un conjunto A de números naturales es tal que entre cualesquiera 100 números naturales consecutivos hay al menos un elemento de A. Prueba que es posible encontrar cuatro números naturales distintos a, b, c y d en A tales que $a + b = c + d$.

Problema 5.57 De una hoja de papel cuadriculado de 29×29 se cortan 99 cuadrados de 2×2. Prueba que es posible cortar otro cuadrado de 2×2.

Problema 5.58 Se cubre un tablero de 10×10 con 55 cuadrados de 2×2. Prueba que hay un cuadrado tal que puede ser removido y los restantes todavía cubren el tablero.

Problema 5.59 Un gran maestro de ajedrez juega al menos una partida al día pero no más de 12 partidas a la semana. Prueba que existen ciertos días consecutivos del año en los cuales él jugó exactamente 20 partidas.

Problema 5.60 Sobre un segmento de 10 cm de largo se colorean de rojo 10 segmentos disjuntos. Es sabido que no hay dos puntos rojos que estén a exactamente 1 cm de distancia. Prueba que la suma de las longitudes de los segmentos rojos es a lo más 5 cm.

Problema 5.61 Se dan 101 puntos dentro de un cuadrado de 1×1. Prueba que hay tres de ellos que forman un triángulo de área menor o igual a 0.01.

Problema 5.62 Se dibujan siete cuerdas en un círculo de radio 1, de modo que cualquier diámetro del círculo interseca a lo más a cuatro de ellas. Prueba que la suma de sus longitudes es a lo más 13.

Problema 5.63 En una habitación de área 5 se colocan 9 alfombras, cada una de área 1 y forma arbitraria. Prueba que hay dos alfombras que se traslapan por lo menos $1/9$.

Problema 5.64 Una amiba de área mayor que 1 vive sobre un plano cartesiano. Prueba que hay dos puntos de la amiba (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tales que $x_1 - x_2$ y $y_1 - y_2$ son enteros.

Problema 5.65 Sea n un número que no es divisible entre dos ni entre 5. Prueba que existe un múltiplo de n que tiene solamente unos en su representación decimal.

Problema 5.66 Prueba que en cualquier hexágono convexo existe una diagonal que "corta" un triángulo con área menor o igual a un sexto de la del hexágono.

Problema 5.67 Se eligen seis puntos en un rectángulo de 3×4. Prueba que hay dos de ellos que están separados por una distancia de a lo más $\sqrt{5}$.

Problema 5.68 Dado un conjunto de diez números de dos dígitos, prueba que se pueden elegir dos subconjuntos ajenos de este conjunto de modo que la suma de los elementos de ambos subconjuntos sea la misma.

Problema 5.69 Prueba que en cualquier $2n$-ágono convexo hay una diagonal que no es paralela a ningún lado.

Problema 5.70 Se tienen $ab + 1$ ratones. Prueba que: o hay $a + 1$ ratones tales que cada uno de ellos desciende de alguno de los otros, o bien hay $b + 1$ ratones tales que ninguno de ellos es descendiente de ninguno de los otros.

Problema 5.71 Se tienen diez segmentos, cada uno de longitud mayor que 1 y menor que 55. Prueba que es posible construir un triángulo con tres de estos segmentos.

Problema 5.72 Dentro de un cuadrado de 1×1 se colocan varios círculos, cuyos perímetros suman 10. Prueba que existe una línea recta que interseca al menos a cuatro de los círculos.

Problema 5.73 Un círculo de radio 1 contiene siete puntos cuyas distancias mutuas son todas mayores o iguales a 1. Prueba que uno de los siete puntos es el centro del círculo.

Problema 5.74 Se pinta de negro el 12 % de la superficie de una esfera, y el resto de blanco. Prueba que es posible inscribir en la esfera un prisma rectangular recto con todos sus vértices blancos.

Problema 5.75 Hay 33 torres colocadas en un tablero de ajedrez. Prueba que es posible elegir cinco entre las cuales no haya dos que se ataquen entre sí.

Problema 5.76 En un cuadrilátero convexo, todos los lados miden menos de 24. Prueba que para todo punto en el interior del cuadrilátero hay un vértice que está separado del punto por una distancia menor a 17.

Problema 5.77 Hay 650 puntos dentro de un círculo de radio 16. Prueba que existe un anillo con radio interior 2 y radio exterior 3 que cubre a 10 de los puntos.

Problema 5.78 Los cuadros de una cuadrícula de 7×7 se pintan con dos colores. Prueba que existen al menos 21 rectángulos formados por las líneas de la cuadrícula, tales que en cada uno de ellos, los cuadros de las 4 esquinas tienen el mismo color

Problema 5.79 El sistema de caminos en Guanajuato es tal que en cada intersección se encuentran 3 caminos. Una rana inicia en una de las intersecciones y toma cualquiera de los tres caminos que salen de ahí. En la siguiente intersección toma el camino de la derecha, al llegar a la siguiente toma el camino de la izquierda, y así sucesivamente. Prueba que la rana regresa en algún momento al punto de partida.

5.5. Juegos

En los siguientes juegos siempre pensaremos que son dos jugadores y si no esta explícito, pediremos las estrategia ganadora para alguno de los jugadores.

5.5.1. Juegos que no son juegos

El extraño título se debe a que en estos juegos uno de los jugadores gana siempre, sin importar los movimientos de los jugadores.

Problema 5.80 Hay tres pilas de piedras: una con 10 piedras, otra con 15 y otra con 20. En cada turno, un jugador elige una pila y la divide en dos pilas mas pequeñas. El perdedor es el jugador que no puede hacer esto. ¿Quién va a ganar y como?

Problema 5.81 Los números 1 al 20 son escritos en el pizarrón. Dos jugadores por turnos ponen signos "$+$" y "$-$" entre los números. Cuando todos los signos son puestos, la expresión resultante se evalúa. El primer jugador gana si la suma es par, el segundo gana si la suma es impar. ¿Quién va a ganar y cómo?

Problema 5.82 Los números 25 y 36 se escriben en el pizarrón. En cada turno, los jugadores escriben en el pizarrón la diferencia (positiva) entre dos números ya escritos (sólo lo escribe si el número resultante no está ya escrito en el pizarrón). Gana quien ya no pueda escribir ningún número.

5.5.2. Juegos de estrategia

Problema 5.83 Dos jugadores por turnos ponen monedas del mismo tamaño en una mesa redonda sin poner alguna moneda sobre otra. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Problema 5.84 Dos jugadores por turnos ponen alfiles en los cuadrados de un tablero de ajedrez de tal forma que ninguno de los ya puestos pueda capturar al otro (no importa el color del lugar donde pongas la pieza). El que ya no puede poner un alfil pierde. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Problema 5.85 Hay dos pilas con piedras. Una tiene 30 piedras y la otra 20. Dos jugadores por turnos quitan tantas piedras como quieran de alguna de las pilas. Gana el jugador que quita la última piedra. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Problema 5.86 Se eligen 20 puntos alrededor de un círculo. Dos jugadores por turnos unen dos de los puntos con un segmento de línea de tal forma que no se cruce un segmento ya trazado. El jugador que no lo puede hacer pierde.

Problema 5.87 Se tiene un paralelepípedo rectangular de (a)$4 \times 4 \times 4$; (b) $4 \times 4 \times 3$; (c) $4 \times 3 \times 3$ que consiste de cubos unitarios. Dos jugadores por turnos tachan alguno de los renglones del paralelepípedo (se puede tachar un renglón mientras tenga al menos un cuadro sin tachar). El jugador que no puede tachar pierde.

Problema 5.88 Dos jugadores por turnos ponen X's u O's en un cuadrado de 9×9. El primero pone X's y el segundo pone O's. Al final del juego, el primer jugador obtiene un punto por cada renglón o columna que contenga mas X's que O's. El segundo jugador obtiene un punto por cada renglón o columna que contenga mas O's que X's. El jugador con más puntos gana.

Problema 5.89 En el tablero de ajedrez, una torre esta en la casilla a1. Los jugadores por turnos mueven la torre horizontal a la derecha o vertical hacia arriba. El jugador que pone la torre en la casilla h8 gana.

5.5.3. Juegos interesates

Problema 5.90 Inicialmente hay n fichas en una mesa. El conjunto de movimientos legales para dos jugadores es quitar alguna de las siguientes cantidades de fichas $M = 1, 2, ..., k$. El que toma la última ficha gana.

Problema 5.91 En el problema anterior, el conjunto de movimientos legales es $M = 1, 2, 4, 8, \ldots$. Encuentra las posiciones perdedoras para cada uno de los jugadores.

Problema 5.92 En el problema anterior, el conjunto de moviemientos legales es $M = 1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ (1 y los primos). Encuentra las posiciones perdedoras para cada jugador.

Problema 5.93 En el problema anterior $M = 1, 3, 8$. Encuentra las posiciones perdedoras para cada jugador.

Problema 5.94 En el problema anterior M son todas las potencias de cualquier primo. Encuentra las posiciones perdedoras para cada jugador.

Problema 5.95 Se inicia con $n = 2$. Dos jugadores por turnos alternados le agregan un divisor propio de n al n actual. El objetivo es llegar a un número mayor o igual que 1990. ¿Quién gana?

Problema 5.96 Dos jugadores se encargan de dibujar de manera alternada las diagonales de un 1998-ágono de tal forma que no se interseque con una ya trazada. El perdedor es el que ya no puede dibujar. ¿Quién gana?

Problema 5.97 A y B alternadamente ponen alfiles, blancos y negros respectivamente, en los cuadrados de un tablero de ajedrez que no este atacado por el enemigo. El perdedor es el que no puede seguir poniendo. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Problema 5.98 ¿Quién tiene estrategia ganadora si reemplazas alfiles por reyes en el problema anterior?

Problema 5.99 ¿Quién tiene estrategia ganadora si reemplazas reyes por torres en el problema anterior?

Problema 5.100 ¿Quién tiene estrategia ganadora si reemplazas torres por caballos en el problema anterior?

Problema 5.101 ¿Quién tiene estrategia ganadora si reemplazas caballos por peones en el problema anterior?

Problema 5.102 ¿Quién tiene estrategia ganadora si reemplazas peones por reinas en el problema anterior?

Problema 5.103 A y B inician con $p = 1$. Enseguida ellos de manera alternada multiplican p por alguno de los numeros entre el 2 y el 9. El ganador es el primero que llega a (a) $p \geq 1000$; (b) $p \geq 10^6$. ¿Quién gana?

Problema 5.104 A y B de manera alternada escriben números $\leq p$ en el pizarrón. Escribir el divisor de algun número ya escrito no esta permitido. ¿Quién gana para (a) $p = 10$?; (b) $p = 1000$?

Problema 5.105 A y B de manera alternada colorean los cuadros de un tablero de 4×4. El perdedor es el primero que completa un subcuadrado de 2×2. ¿Quién gana?

Problema 5.106 Dos jugadores por turnos colorean algún cuadrado con vértices con coordenadas enteras de un rectángulo de 19×94 con vértice en el origen y lados paralelos a los ejes coordenados. El que ya no puede colorear pierde. ¿Quién gana?

Problema 5.107 Se inicia con $n \geq 12$ enteros positivos sucesivos. A y B de manera alternada toman un entero hasta que sólo quedan dos numeros a y b. A gana si $mcd(a, b) = 1$. B gana si $mcd(a, b) > 1$. ¿Quién gana?

Problema 5.108 Dos jugadores A y B alternadamente toman fichas de dos pilas con a y b fichas respectivamente. Inicialmente $a > b$. Un movimiento consiste en tomar de la pila un multiplo de fichas de la otra pila. El ganador es el que toma la última ficha en alguna de las pilas. Prueba que si $a > 2b$ entonces el primer jugador A puede forzar a ganar. ¿Para que valores de α puede A forzar a ganar si inicialmente $a > \alpha b$?

5.5.4. Más juegos

En todos los problemas que restan de esta sección se supone que hay dos jugadores que hacen sus movimientos por turnos, uno después del otro. A menos que se diga lo contrario, hay que determinar cuál de los dos jugadores puede ganar sin importar lo que haga el otro (ya sea el jugador que hace el primer movimiento, o el otro).

Problema 5.109 Se coloca un peón en cada uno de los tres cuadros del extremo izquierdo de una cuadrícula de 1×20. Un movimiento consiste en mover un peón a cualquiera de los cuadros libres que se encuentren a su derecha, sin saltar sobre otros peones. Pierde el jugador que no puede mover.

Problema 5.110 Se coloca un peón en cada uno de los tres cuadros del extremo izquierdo de una cuadrícula de 1×20. Un movimiento consiste en mover un peón al cuadro vecino hacia la derecha, si éste se encuentra libre. Si el cuadro vecino está ocupado pero el siguiente está libre, el jugador puede mover el peón a ese cuadro libre. Pierde el jugador que no puede mover.

Problema 5.111 Se escribe el número 1234 en el pizarrón. Un movimiento consiste en restarle algún dígito distinto de cero al número que se encuentre en el pizarrón, borrar el número que está en el pizarrón y reemplazarlo con la resta calculada. Gana el jugador que escriba el cero.

Problema 5.112 Se escriben los números del 1 al 100 en una hilera. Un movimiento consiste en insertar alguno de los signos "$+$", "$-$" o "$\times$" en el hueco entre dos números vecinos. Los jugadores realizan movimientos por turnos hasta que se hayan ocupado todos los huecos. El primer jugador gana si el resultado final es impar, y el segundo gana si es par.

Problema 5.113 En un pizarrón se escriben los números $1, 2, 3, \ldots, 20, 21$ en una hilera. Un movimiento consiste en tachar uno de los números que no hayan sido tachados todavía. El juego termina cuando queden solamente dos números sin tachar. El primer jugador gana si la suma de estos dos números es divisible entre 5, y el segundo gana en cualquier otro caso.

Problema 5.114 Se tiene un tablero de a) 10×10; b) 9×9. Un movimiento consiste en marcar cualquier casilla libre con un signo "+" o uno "−" (cada jugador puede escoger cualquiera de los dos signos en cada turno). Gana el jugador cuyo movimiento crea tres signos consecutivos iguales en línea (horizontal, vertical o diagonal).

Problema 5.115 Hay dos montones de dulces en una mesa: uno con 22 dulces y el otro con 23. Un movimiento consiste en comer dos dulces de uno de los montones, o bien mover cambiar uno de los dulces de montón. Gana el jugador que no puede mover.

Problema 5.116 El primer jugador escribe en un pizarrón uno de los dígitos: 6, 7, 8 o 9. Cada movimiento subsecuente consiste en escribir uno de estos mismos dígitos a la derecha del número que se encuentre en el pizarrón. El juego termina después de a) 10 movimientos; b) 12 movimientos (no olvides que el primer movimiento es cuando el primer jugador escribe uno de los dígitos en el pizarrón vacío). El primer jugador gana si el número obtenido al final es divisible entre 9, y pierde en otro caso.

Problema 5.117 Dos jugadores juegan un juego en una hoja de papel cuadriculado infinita. El primer jugador pone una cruz en alguno de los cuadros. En cada uno de sus siguientes movimientos él debe poner una cruz en cualquier cuadro libre que comparta un lado con algún cuadro que ya tenga una cruz. Un movimiento del segundo jugador consiste en colocar tres círculos en cualesquiera tres cuadros libres. Prueba que no importa lo que haga el primer jugador, el segundo siempre puede crear una posición en la cual el primero no tiene movimientos permitidos.

Problema 5.118 Hay 1001 cerillos en una pila. Un movimiento consiste en quitar p^n cerillos de la pila, donde p es cualquier número primo y n es cualquier entero no negativo. Gana el jugador que toma el último cerillo.

Problema 5.119 Hay 1991 clavos clavados en una tabla. Un movimiento consiste en conectar con un cable dos clavos que no estén ya conectados entre sí. Si después de un movimiento hay un circuito, el jugador que hizo ese movimiento a) gana; b) pierde.

Problema 5.120 Se tiene una cuadrícula de a) 19×91; b) 19×92. Un movimiento consiste en colorear de negro una o más casillas que formen un cuadrado. No se permite colorear dos veces una misma casilla. Gana el jugador que colorea la última casilla.

Problema 5.121 Se tiene una hoja de papel cuadriculado de 30×45. Un movimiento consiste en hacer un corte a lo largo de uno de los segmentos de longitud 1 marcados en el papel. El primer jugador inicia cortando a partir de la orilla del papel, y todo corte subscuente debe comenzar donde terminó el corte anterior. Pierde el jugador que separa la hoja en dos partes.

Problema 5.122 Un rey, en su turno, puede poner dos cruces en cualesquiera dos cuadros libres de una hoja infinita de papel cuadriculado. Su secretario, en su turno, puede poner un círculo en cualquier cuadro libre. ¿Puede el rey obtener 100 cruces en línea vertical u horizontal?

5.6. Problemas de construcción

Problema 5.123 ¿Es posible colocar 10 números en hilera de modo que la suma de cualesquiera cinco números consecutivos sea positiva, y la suma de cualesquiera siete números consecutivos sea negativa?

Problema 5.124 Encuentra un número de diez dígitos tal que el primer dígito sea igual a la cantidad de ceros en la representación decimal del número, el segundo dígito sea igual a la cantidad de unos en la representación decimal del número, etc., y el décimo dígito sea igual a la cantidad de nueves en la representación decimal del número.

Problema 5.125 Alí Babá quiere entrar en la cueva de Sésamo. Frente a la entrada hay un barril, que tiene cuatro agujeros. Dentro de cada agujero hay un frasco y dentro de cada frasco hay un arenque. Un arenque puede ser puesto en un frasco con la cabeza hacia arriba o hacia abajo. Alí Babá puede meter sus manos en cualesquiera dos de los agujeros y, después de examinar las posiciones de los arenques, cambiar sus posiciones de la manera que desee. Después de esta operación el barril comienza a rotar, y cuando se detiene Alí Babá no puede distinguir en cuáles agujeros aplicó la operación. La cueva se abrirá si y solamente si los cuatro arenques están en la misma posición. ¿Qué debe hacer Alí Babá para entrar en la cueva?

Problema 5.126 Encuentra una manera de colorear una hoja de papel cuadriculado infinita con cinco colores de manera que los cuadros en cualquier figura del tipo A tengan los cinco colores, pero eso no sea cierto para ninguna figura del tipo B.
FIGURA PENDIENTE

Problema 5.127 Dibuja una figura con la que no se pueda cubrir un semicírculo de radio 1, pero tal que sea posible cubrir un círculo de radio 1 con dos copias de ella (las copias pueden traslaparse).

Problema 5.128 Elige 6 puntos en el plano de tal manera que el triángulo determinado por cualesquiera tres de ellos sea isósceles.

Problema 5.129 Dibuja 11 cuadrados disjuntos (es decir, que no tengan puntos interiores comunes, aunque pueden compartir puntos en la orilla), en el plano de modo que no puedan ser coloreados propiamente usando 3 colores. Una coloración de un conjunto de figuras es llamada *propia* si cualesquiera dos figuras que compartan uno o más puntos sobre sus orillas tienen colores distintos.

Problema 5.130 Cubre todo el plano con cuadrados que no se traslapen, de tal manera que solamente dos de ellos sean del mismo tamaño.

Problema 5.131 Dibuja un polígono y un punto en el plano de tal manera que ninguno de los lados del polígono sea completamente visible desde el punto (es decir, que si colocamos un observador en el punto elegido, para todo lado del polígono hay una parte cuya visibilidad es bloqueada por otro(s) lado(s) del polígono). Hay dos casos: a) el punto está dentro del polígono; b) el punto está fuera del polígono.

Problema 5.132 Elige siete puntos en el plano de tal manera que entre cualesquiera tres de ellos haya dos separados por una distancia de 1 cm.

5.7. Desigualdades geométricas

Problema 5.133 Prueba que los círculos construidos con dos lados de un triángulo como diámetros cubren totalmente al triángulo.

Problema 5.134 Prueba que los círculos construidos con los cuatro lados de un cuadrilátero como diámetros cubren totalmente al cuadrilátero.

Problema 5.135 Prueba que un polígono convexo no puede tener más de tres ángulos interiores agudos.

Problema 5.136 Prueba que en cualquier polígono convexo la suma de cualesquiera dos ángulos interiores es mayor que la diferencia de cualesquiera dos ángulos interiores.

Problema 5.137 En el plano se tienen un círculo de radio 1 cm y cinco líneas rectas que lo intersecan. Se sabe que el punto X está a una distancia de 11.1 cm del centro del círculo. Prueba que si X es reflejado consecutivamente respecto a las cinco rectas, el punto resultante no puede estar dentro del círculo.

Problema 5.138 Un astrónomo observó 50 estrellas tales que la suma de las distancias entre todas las parejas de estrellas es S. Después, una nube bloqueó de la vista a 25 de las estrellas. Prueba que la suma de las distancias entre las parejas de estrellas restantes es menor que $S/2$.

Problema 5.139 Se corta un cuadrado de 1×1 en varios rectángulos. Para cada uno de ellos calculamos la razón entre el lado más pequeño y el más grande. Prueba que la suma de estas razones es menor o igual a 1.

Problema 5.140 Un triángulo ABC tiene sus vértices sobre los nodos de una hoja de papel cuadriculado (cuyos cuadros tienen longitud 1). Se sabe que $AB > AC$. Prueba que $AB - AC > 1/p$, donde p es el perímetro del triángulo ABC.

5.8. Geometría combinatoria

Problema 5.141 Se tienen cinco puntos en el plano entre los cuales no hay tres colineales. Prueba que cuatro de ellos son los vértices de un cuadrilátero convexo.

Problema 5.142 Se corta un cuadrado de 2×2 en varios rectángulos. Prueba que podemos colorear algunos de ellos de negro de tal manera que la proyección de los rectángulos coloreados sobre uno de los lados del cuadrado tenga longitud menor o igual a uno, y que la proyección de los rectángulos coloreados sobre otro de los lados del cuadrado tenga longitus mayor o igual a 1.

Problema 5.143 Seis monedas de un peso están sobre una mesa, formando una cadena cerrada. Una séptima moneda de un peso "rueda" a lo largo de la parte exterior de la cadena sin "resbalarse", tocando a todas las seis monedas fijas en su camino. ¿Cuántos giros completos dará la séptima moneda antes de regresar a su posición original?

Problema 5.144 Se tiene una línea quebrada cerrada formada por ocho segmentos, cuyos vértices coinciden con los vértices de un cubo. Prueba que uno de los segmentos de la línea es una arista del cubo.

Problema 5.145 Se tienen varios segmentos en una línea recta, y se sabe que cualesquiera dos de ellos tienen algún punto en común. Prueba que todos los segmentos tienen algún punto en común.

Problema 5.146 Varios segmentos cubren un segmento de longitud 1. Prueba que es posible elegir de entre ellos algunos que sean disjuntos y cuyas longitudes sumen al menos $1/2$.

Problema 5.147 Varios segmentos cubren un segmento de longitud 1. Prueba que sus mitades izquierdas cubren por lo menos la mitad del segmento de longitud 1.

5.9. Varios

Problema 5.148 Se tienen n puntos en un plano. Cada tres de ellos forman un triángulo de área menor o igual a 1. Prueba que los n puntos pueden ser cubiertos con un triángulo de área ≤ 4.

Problema 5.149 Se tienen $2n$ puntos en el plano. n de ellos son granjas y los otros n son granjeros. Se pretende unir con un camino recto cada granja con un granjero de tal forma que no se intersequen los caminos y no haya dos granjas con el mismo granjero. Prueba que siempre es posible hacer esto.

Problema 5.150 Sea Ω un conjunto de puntos tal que cada si dos puntos estan en Ω entonces su punto medio tambien está. ¿Sera que Ω es infinito?

Problema 5.151 Sea Ω un conjunto de puntos tal que cada punto de Ω es el punto medio de dos puntos que estan en Ω. Prueba que Ω es infinito.

Problema 5.152 Da un ejemplo de un conjunto que satisfaga el problema anterior.

Problema 5.153 En cada pentágono convexo es posible encontrar tres diagonales con las que se puede construir un triángulo.

Problema 5.154 En cada tetraedro hay tres lados con un vértice en comun con los cuales se puede construir un triángulo.

Problema 5.155 Cada punto latiz (es decir, con coordenadas enteras) del plano se etiqueta con un número positivo de tal manera que la etiqueta es el promedio aritmético de las etiquetas de los cuatro puntos que lo rodean. Prueba que todos los puntos tienen la misma etiqueta.

Problema 5.156 No existe una cuarteta de enteros positivos (x, y, z, w) que satisfaga:

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2).$$

Problema 5.157 Un conjunto finito de puntos en el plano tiene la propiedad que la línea que pasa por dos de ellos pasa por un tercero. Prueba que todos los puntos estan en una linea. [1]

Problema 5.158 ¿Será cierto el problema anterior si el conjunto no es finito?

Problema 5.159 En Sikinia, cada par de ciudades está conectado por un camino de un sentido. Prueba que existe una ciudad desde la cual se puede ir a cualquier otra ciudad vía a lo más una tercera ciudad.

Problema 5.160 El parlamento de Sikinia consiste de una cámara. Cada persona tiene a lo mas tres enemigos entre los restantes. Prueba que el parlamento se puede dividir en dos cámara de tal forma que las personas en las cámaras tengan a lo más un enemigo en su cámara.

Problema 5.161 ¿Será posible elegir 1983 numeros distintos menores que 100000 de tal forma que no haya tres en progresión aritmética?

Problema 5.162 Existen tres vértices consecutivos A, B y C en un n-ágono convexo tales que la circunferencia que pasa por esos tres vértices cubre a todo el n-ágono.

Problema 5.163 Prueba que $k\sqrt{2}$ no es un entero para ningún k entero.

Problema 5.164 Se inicia con varias pilas de monedas. Dos jugadoras por turnos parten alguna de las pilas (si tiene mas de una ficha) en dos. La jugadora que haga el último movimiento gana. ¿Para qué condiciones iniciales la primera jugadora puede asegurar la victoria?

Problema 5.165 Se tienen 20 países en un planeta. Entre cualesquiera tres países siempre hay dos que no tienen relaciones diplomáticas. Prueba que hay a lo mas 200 embajadas en el planeta.

Problema 5.166 Un cubo no puede ser dividido en varios cubitos distintos por pares.

Problema 5.167 Se tiene un número finito de polígonos, no necesariamente convexos, tales que cualesquiera dos tienen un punto en común. Prueba que hay una línea que tiene un punto en común con todos ellos.

Problema 5.168 Cualquier polígono convexo de área 1 puede ser metido en un rectángulo de area 2.

Problema 5.169 Se tienen un numero finito de puntos, no todos ellos colineales. Prueba que existen tres de ellos tales que el círculo que pasa por esos tres puntos no contiene en su interior a ninguno de los puntos restantes.

[1] Problema de Sylvester de 1893, resuelto por primera vez 55 años despues en unas cuantas lineas con el principio extremal.

Problema 5.170 Se tienen $2n+3$ puntos de modo que no hay tres colineales ni cuatro concíclicos. Prueba que es posible elegir tres de ellos tales que el círculo que pasa por esos tres contiene a n de los puntos en su interior y a los n restantes fuera de él.

Problema 5.171 Entre 15 primos relativos mayores que 1 y menores que 1992 siempre hay un primo.

Problema 5.172 Se tienen n puntos en el plano. Se pintan de rojo los puntos medios de todos los segmentos con extremos en en los n puntos. Prueba que hay por lo menos $2n-3$ puntos distintos pintados.

Capítulo 6

Problemas sin clasificar

Problema 6.1 Prueba que un cuadrado se puede dividir en n cuadrados (no necesariamente del mismo tamaño) para cualquier $n \geq 6$.

Problema 6.2 ¿Será posible dividir la superficie de una esfera en un número impar de regiones, todas triangulares?

Problema 6.3 Demuestra que para toda $n \geq 5$ se pueden dividir los números del 1 al n en dos grupos de tal forma que el producto de los números del primer grupo sea igual a la suma de los números del segundo grupo.

Problema 6.4 Mil puntos son vértices de un polígono convexo de mil lados, dentro del cual hay otros 500 puntos, de forma que entre los 1500 puntos no hay tres colineales. ¿Cuántos triángulos se forman si sólo podemos usar estos 1500 puntos como vértices, los triángulos cubren todo el 1000-ágono y no se traslapan? Justifica tu respuesta.

Problema 6.5 ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono convexo con todos sus ángulos internos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden?

Problema 6.6 En una cierta isla, la única forma de vida presente son los camaleones. Estos camaleones son inmortales y jamás nacen más camaleones. Son de color verde, blanco y rojo, y hay 2000, 3000 y 4000 camaleones de cada color, respectivamente. Cada vez que dos camaleones se encuentran frente a frente, lo cual nunca sucede entre más de dos camaleones, ocurre lo siguiente:

(1) Si los dos camaleones son de diferentes colores, digamos A y B, entonces los dos camaleones se volverán de color C.

(2) Si los dos camaleones son del mismo color, digamos A, entonces uno de los camaleones se volverá de color B y el otro de color C.

¿Podrán algún día los camaleones ser todos del mismo color?

Problema 6.7 En un tablero de ajedrez (de 8×8) están escritos los números del 1 al 64 en el orden convencional, es decir, en la primera fila los números del 1 al 8, en la segunda del 9 al 16, etc. (ordenados de izquierda a derecha). Se colocan signos $+$ o $-$ a cada número de manera que en cada fila y en cada columna haya cuatro signos $+$ y cuatro signos $-$. Se suman los 64 números así obtenidos. Encuentra todos los posibles resultados de esta suma.

Problema 6.8 Encuentra todos los valores de n para los cuales es posible cubrir un tablero de $n \times n$ con tetrominós "T".

Problema 6.9 Dado un número natural n, sea $f(n)$ el promedio de todos sus divisores positivos. Demuestra que

$$\sqrt{n} \leq f(n) \leq \frac{n+1}{2}.$$

Problema 6.10 Se tienen cuatro puntos entre los cuales no hay tres colineales. Demuestra que existe un triángulo no acutángulo con vértices sobre estos puntos.

Capítulo 7

Exámenes

7.1. Exámenes estatales

7.1.1. Primera etapa (2002)

Problema 7.1 ¿Cuántos números impares que son múltiplos de 5 hay entre 504 y 2002?

(a) 150 (b) 151 (c) 300 (d) 301 (e) Sin respuesta

Problema 7.2 En la figura 7.1, la figura A se obtiene al cortar en una de las esquinas de un cuadrado de 24 cm de perímetro, un cuadradito de 8 cm de perímetro. Con dos figuras iguales a A se arma la figura B. ¿Cuál es el perímetro de la figura B?

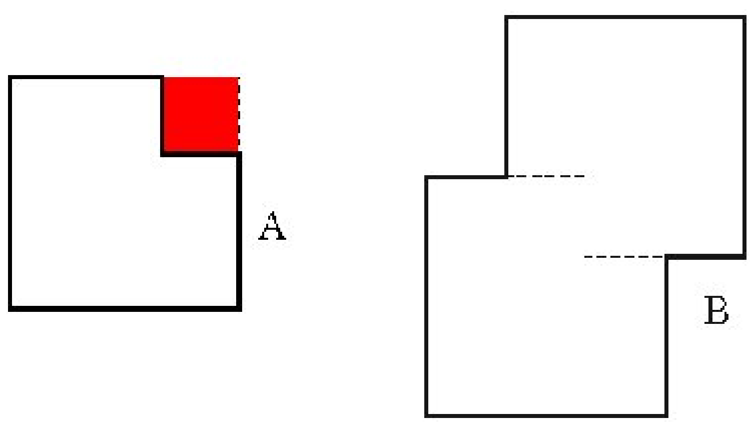


Figura 7.1:

(a) 44 cm (b) 36 cm (c) 72 cm (d) 40 cm (e) Sin respuesta

Problema 7.3 Dos obreros, uno viejo y otro joven, viven en un mismo apartamento y trabajan en la misma fábrica. El joven va desde la casa a la fábrica en 20 minutos; el viejo, en 30 minutos. ¿En cuántos minutos alcanzará el joven al viejo, si éste sale de casa 5 minutos antes que el joven?

(a) 10 minutos (b) 15 minutos (c) 18 minutos (d) 12 minutos (e) Sin respuesta

Problema 7.4 Cuando se escriben los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, 2002$ (es decir desde el número 1 hasta el número 2002), ¿cuál es el dígito que ocupa el lugar 2002? Por ejemplo, si buscáramos el dígito que ocupa el lugar 15, éste sería el 2 (del número 12).

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 7 (e) Sin respuesta

Problema 7.5 En la época en que los cañones lanzaban balas, éstas eran almacenadas en parques de artillería en forma de pirámides de base cuadrada; cada lado del cuadrado de la base contaba con 10 balas. ¿Cuál era el número de balas por pirámide?

(a) 385 balas (b) 400 balas (c) 1015 balas (d) 1000 balas (e) Sin respuesta

Problema 7.6 Durante un juicio en el pais de las maravillas la *liebre de marzo* dijo que las galletas fueron robadas por el *sombrerero loco*. Entonces el *sombrerero loco* y la *hormiga plutonense* dieron testimonios que por alguna razón no fueron grabados. Después, durante el juicio, se encontró que las galletas fueron robadas por uno y solamente uno de los tres involucrados, y, además, solamente el culpable dio un testimonio verídico. ¿Quién robó las galletas?

(a) La *liebre de marzo* (b) El *sombrerero loco* (c) La *hormiga plutonense* (d) Ninguno de los anteriores (e) Sin respuesta

Problema 7.7 ¿Cuál de las siguientes igualdades es verdadera para cualesquiera valores de a y b?
(a) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$
(b) $(a + b)^3 - (a + b)^2 = a + b$
(c) $a^2 - b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
(d) $a^{100} - b^{100} = (a^{50} + b^{50})(a^{25} + b^{25})(a^{25} - b^{25})$
(e) Sin respuesta

Problema 7.8 Se tiene un trozo de madera de 75 cm $\times$ 60 cm de longitud. Se desea tapar un hoyo de 50 cm $\times$ 90 cm. ¿Cómo taparias el hoyo si solamente le puedes hacer un solo corte al trozo de madera?

Problema 7.9 Pedro dijo: "Anteayer yo tenía 16 años pero voy a cumplir 19 el siguiente año" ¿Es esto posible? En caso de que sí, ¿cómo?

Problema 7.10 Divide el conjunto de pesas 1 g, 2 g, $\ldots$, 555 g en tres grupos de igual peso.

7.1.2. Segunda etapa (2002)

Problema 7.11 Toma dos números (no necesariamente enteros) cuya suma sea 1. ¿Qué es mayor, el cuadrado del menor sumado al mayor o el cuadrado del mayor sumado al menor?

Problema 7.12 ¿Cuántos enteros menores que 1000 tienen su suma de cifras igual a 7?

Problema 7.13 En la figura 7.2 se tienen dos semicircunferencias concéntricas y el segmento MN tangente a la menor. Las rectas MN y AB son paralelas y el segmento MN mide 12 cm. Calcula el área de la figura sombreada.

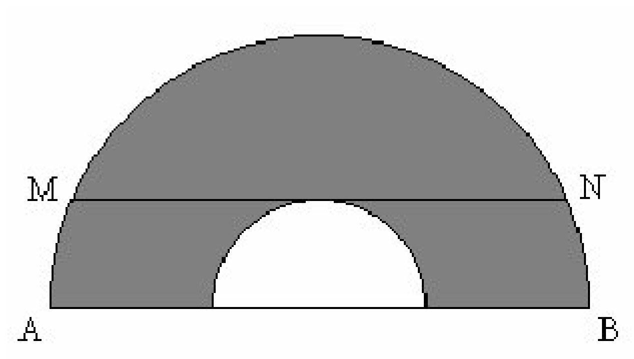


Figura 7.2:

Problema 7.14 ¿Se pueden cambiar a, b y c por dígitos distintos de forma que la suma sea correcta?

$$\begin{array}{r} abc \\ +\ bca \\ \hline cab \end{array}$$

Problema 7.15 Corta un triángulo arbitrario en tres partes de tal forma que éstas se puedan reacomodar para formar un rectángulo.

7.1.3. Tercera etapa (2002)

Problema 7.16 Dadas una circunferencia Γ de centro O y una circunferencia Γ' que pasa por O y corta a Γ en A y B, sea C (distinto de O) un punto de Γ' que está en el interior de la circunferencia Γ. La recta AC corta nuevamente a la circunferencia Γ en D. Demuestra que $CB = CD$.

Problema 7.17 Encuentra todos los enteros que no son múltiplos de 10 y que cumplen la propiedad de que al borrarles el último dígito (el de las unidades), el número que resulta divide al número original.

Problema 7.18 El entrenador del equipo de natación decidió organizar una serie de prácticas entre los siete integrantes del equipo. Cada día se hará una sola competencia en la que participarán tres de ellos. Cada nadador competirá sólo una vez con cada uno de los restantes.

- ¿Cuántos días durará esta serie de prácticas? Explica por qué no puede durar ni más, ni menos días de los que dices.
- Muestra una posible distribución indicando los tres nadadores que compiten cada día.

Problema 7.19 Se tienen dos paralelogramos $ABCD$ y $DEFG$ tales que el punto E está sobre el lado AB, y el punto C está sobre el lado FG. Demuestra que ambos paralelogramos tienen la misma área.

Problema 7.20 Utilizando exclusivamente números primos se forma un conjunto con las siguientes condiciones:

- Cualquier número primo de una cifra puede estar en el conjunto.
- Para que un número primo de más de una cifra esté en el conjunto, deben estar en el conjunto el número que resulta de suprimirle sólo la primera cifra y también el número que resulta de suprimirle sólo la última cifra.

Escribe, de los conjuntos que cumplen estas condiciones, el que tiene la mayor cantidad de elementos. Justifica por qué no puede haber uno con más elementos. Recuerda que el número 1 no es primo.

7.1.4. Cuarta etapa (2002)

Problema 7.21 Encuentra todos los números primos p para los cuales $4p+1$ es un cubo perfecto.

Problema 7.22 Sea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2000, 2001, 2002\}$ el conjunto de todos los enteros positivos desde el 1 hasta el 2002. Definimos el *peso* de cada subconjunto de M como la suma de sus elementos. ¿Cuál es el promedio de los pesos de todos los subconjuntos de M?

Problema 7.23 Sea X cualquier punto entre B y C en el lado BC del cuadrilátero convexo $ABCD$. Una línea es trazada por B paralela a AX y otra línea es trazada por C paralela a DX. Esas dos líneas se intersecan en P. Prueba que el área del triangulo APD es igual al área del cuadrilátero $ABCD$.

Problema 7.24 Ernestino le dice a su hermana que si ella piensa un número con todos sus dígitos distintos y ordenados en forma creciente de izquierda a derecha, y luego multiplica por 9 el número que pensó, él siempre sabe cuánto vale la suma de los dígitos del resultado de la multiplicación, aunque no sabe qué número pensó la hermana. Decidir si Ernestino miente o dice la verdad y explicar por qué.

7.1.5. Examen final (2002)

Problema 7.25 Decimos que un número es descendente si cada uno de sus dígitos es menor o igual que el dígito anterior, de izquierda a derecha. Por ejemplo, 4221 y 751 son descendentes, mientras que 476 y 455 no son descendentes. Determina si existen enteros positivos n para los cuales 16^n es descendente.

Problema 7.26 Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O se trazan las tangentes PA y PB. Si BC es un diámetro y H es un punto sobre BC tal que AH y BC son perpendiculares,
(a) demuestra que AC y OP son paralelos.
(b) demuestra que CP pasa por el punto medio de AH.

Problema 7.27 Sea A un entero positivo tal que $2A$ es un cuadrado perfecto, $3A$ es un cubo perfecto y $5A$ es un número elevado a la quinta potencia.
(a) Encuentra un valor de A que cumpla las condiciones anteriores.
(b) Prueba que existe un número infinito de valores que puede tomar A.

Problema 7.28 Tres parejas se reúnen para comer. Cada persona llega en un diferente momento a la cita. Cada uno de los que va llegando saluda a todos los que ya están excepto a su pareja. Cuando ya todos están reunidos, una de las personas pregunta a cada uno de los otros a cuántas personas saludó a su llegada y obtiene cinco respuestas distintas. ¿En que lugar llegó la persona que preguntó, si sabemos que llegó después de su pareja?

Problema 7.29 Sea ABC un triángulo. Llamemos L y M a los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en ABC con los lados AB y BC respectivamente. La recta LM interseca a la bisectriz del ángulo A en P. Prueba que el ángulo APC es recto.

Problema 7.30 Se pretende cubrir totalmente un cuadrado de lado k (k entero mayor que uno) con todos los siguientes rectángulos: 1 rectángulo de 1×1, 2 rectángulos de 2×1, 4 rectángulos de 3×1, ... , $2n$ rectángulos de $(n+1) \times 1$, de tal manera que los rectángulos no se superpongan ni excedan los límites del cuadrado. Hallar todos los valores de k para los cuales esto es posible y, para cada valor de k encontrado, dibujar una solución.

7.1.6. Exámenes de práctica (2002)

Problema 7.31 Consideramos los números enteros del 1 al 1000 (ambos inclusive). Sumamos entre sí todos los que tienen todos sus dígitos pares, y por otro lado sumamos entre sí todos los que tienen todos sus dígitos impares. ¿Cuál suma es mayor? ¿Por qué?

Problema 7.32 ¿Es posible escribir los 11 números desde 1985 hasta 1995 en algún orden de modo que el número de 44 cifras que se obtiene resulte primo?

Problema 7.33 Sea ABC un triángulo escaleno de área 7. Sea A_1 un punto del lado BC y sean B_1 y C_1 en las rectas AC y AB, respectivamente, tales que AA_1, BB_1 y CC_1 son paralelas. Encuentra el área del triángulo $A_1B_1C_1$.

Problema 7.34 Se construye un polígono regular de n lados ($n > 3$) y se enumeran sus vértices del 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero del 1 al n, de forma que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:
a) El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.
b) Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

Problema 7.35 Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.
a) Prueba que OA es perpendicular a PQ.
b) Si M es el punto medio de BC, prueba que $AP^2 = 2AD \cdot OM$.

Problema 7.36 Un mago tiene cien tarjetas numeradas del 1 al 100. Las coloca en tres cajas, una roja, una blanca y una azul, de modo que cada caja contiene por lo menos una tarjeta. Una persona del público selecciona dos de las tres cajas, elige una tarjeta de cada una, y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la cual no se eligió ninguna tarjeta. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione? (Dos maneras de distribuir se consideran distintas si hay al menos una tarjeta que es colocada en una caja diferente en cada distribución.)

Problema 7.37 ¿Es posible cubrir un tablero de 5×7 con triminós "L" sin salirse de los límites del tablero, en varias capas, de tal manera que cada casilla del tablero quede cubierta por el mismo número de triminós "L"? Nota: Un triminó "L" es la figura que se forma al quitarle a un cuadrado de 2×2 cualquiera de sus esquinas de 1×1.

Problema 7.38 En cada uno de n cartones ($n > 2$) es escrita una cifra. Arreglando los n cartones de todas las maneras posibles, obtenemos $n!$ números naturales (algunos posiblemente iguales). ¿Es posible que el producto de esos $n!$ naturales tenga solamente unos en su representación decimal?

Problema 7.39 Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sean E y F los pies de las perpendiculares desde la intersección de las diagonales AC y BD a AB y CD respectivamente. Prueba que EF es perpendicular a la línea que une los puntos medios de AD y BC.

7.1.7. Primera etapa (2003)

Problema 7.40 ¿Cuántos números enteros entre 0 y 300 tienen la suma de sus dígitos igual a 10?

(a) 25 (b) 26 (c) 28 (d) 30 (e) Sin respuesta

Problema 7.41 La suma de todos los números impares de dos dígitos menos la suma de todos los números pares de dos dígitos es

(a) 46 (b) 45 (c) 49 (d) 48 (e) Sin respuesta

Problema 7.42 Sofía conoció a Carlos, Rubén, Saúl, Javier y Chuy en una comida. Al día siguiente uno de ellos le llamó para invitarla a salir. Como era muy tímido no le dijo su nombre, pero precisó que lo reconocería porque era el más chaparrito, morenito y encantador.
i. Rubén es el más alto.
ii. Hay alguien más moreno que Carlos.
iii. Saúl es más alto que Chuy.
iv. Javier no es encantador.
¿Quién salió con Sofía?

(a) Carlos (b) Saúl (c) Javier (d) Chuy (e) Sin respuesta

Problema 7.43 Cada letra representa un número en el arreglo de la figura 7.3. La suma de cualesquiera tres números consecutivos es 18. ¿Cuánto vale H?

3	B	C	D	E	8	G	H	I

Figura 7.3:

(a) 3 (b) 8 (c) 7 (d) 1 (e) Sin respuesta

Problema 7.44 ¿Cuál es el dígito de las unidades del número que resulta de sumar todos los números impares del 1 al 2003?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) Sin respuesta

Problema 7.45 En la figura 7.4 El cuadrado $ABDE$ y el triángulo isósceles BCD ($BC = CD$) tienen igual perímetro. El polígono $ABCDE$ tiene 72 cm. de perímetro. ¿Cuál es la longitud de BC?

(a) 14.4 cm (b) 18 cm (c) 24 cm (d) 36 cm (e) Sin respuesta

Problema 7.46 Un comerciante dispone de seis barriles, llenos de jugo de naranja, con capacidades de 15, 16, 18, 19, 20 y 31 litros. Aparta uno para su uso propio y el jugo en los barriles restantes se vende a dos personas distintas de tal modo que uno de ellos compra exactamente el doble de litros de jugo que el otro. Si todos estos barriles están cerrados, ¿cuál es la capacidad del barril apartado?

(a) 15 litros (b) 18 litros (c) 19 litros (d) 20 litros (e) Sin respuesta

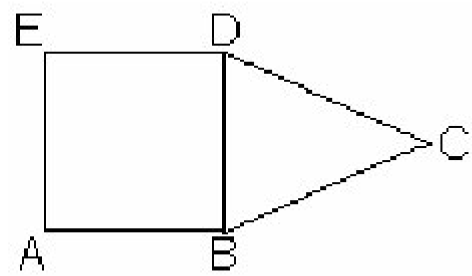


Figura 7.4:

Problema 7.47 Sofía, Rubén, Carlos y Saúl decidieron tomarse cinco fotos.
i. En cada foto había al menos una persona.
ii. Sólo una foto tiene una sola persona y esta persona es Sofía.
iii. Carlos no se tomó ninguna foto con Sofía.
iv. Saúl se tomó exactamente dos fotos con Sofía y una con Carlos.
v. Rubén se tomó tres fotografías en total.
vi. Sofía se tomó dos fotos con Rubén.
vii. En las fotos donde sale Carlos siempre sale junto a Rubén.
¿Quién se tomó más fotos?

(a) Sofía (b) Rubén (c) Carlos (d) Saúl (e) Sin respuesta

Problema 7.48 Como el médico me recomendó caminar, todas las mañanas doy una vuelta (a velocidad constante) a la manzana en la que vivo. Mi mujer aprovecha para correr (a velocidad constante) alrededor de la misma manzana. Salimos juntos y llegamos al mismo tiempo. Ella recorre la manzana en el mismo sentido que yo y me rebasa dos veces durante el recorrido. Si ella corriera en el sentido contrario al mío, ¿cuántas veces se cruzaría conmigo?

Problema 7.49 Seis personas tratan de adivinar el número de piedras que hay en una caja. Ana dice que hay 52 piedras, Beatriz dice 59, Carla dice 62, Daniel 65, Enrique 49 y Federico 42. Todos se equivocaron, algunos dijeron de más y otros dijeron de menos, y sus errores fueron de 1, 4, 6, 9, 11 y 12, en algún orden, pero no se sabe quién cometió cada error. Determinar cuántas piedras hay en la caja y qué error cometió cada persona.

Problema 7.50 En la figura 7.5 se muestra un triángulo equilátero de lado 2 cm. Con centro en los vértices del triángulo y radio 1 cm. se trazaron las circunferencias. Calcula el área de la región sombreada.

7.1.8. Segunda etapa (2003)

Problema 7.51 En la figura 7.6, el triángulo ABC es rectángulo en B y tiene 50 cm^2 de área. D es el punto medio de BC y $AB = 12{,}5$ cm. Los arcos BC y CD son semicircunferencias. ¿Cuál es

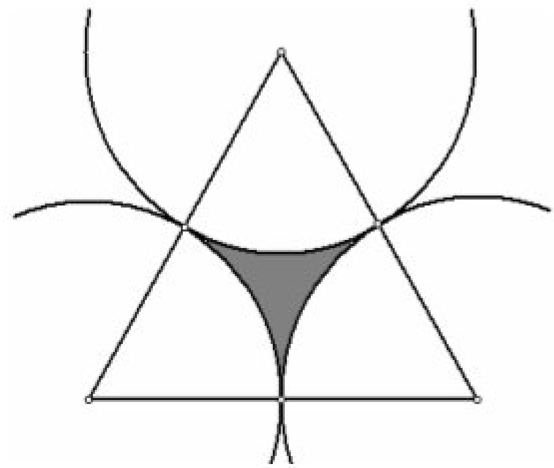


Figura 7.5:

el área de la zona sombreada?

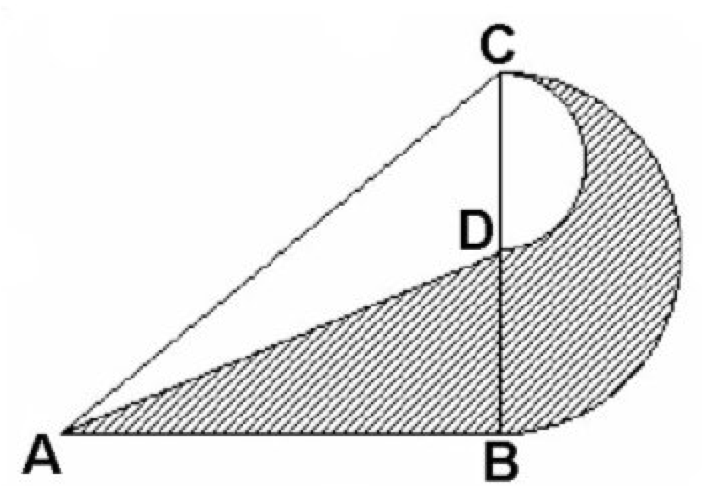


Figura 7.6:

Problema 7.52 Las casillas de una cuadrícula de 2003×2003 se colorean, siguiendo el patrón indicado en la figura 7.7, con cuatro colores llamados 1, 2, 3 y 4. ¿Qué color se usó más que los otros? ¿Cuántas veces se usó dicho color?

Problema 7.53 Encuentra el tablero cuadrado más pequeño que puede ser cubierto por figuras como la de la figura 7.8, sin que éstas se traslapen ni se salgan del tablero.

1	2	3	4	1	2	3	4	$\cdots$	$\cdots$
2	3	4	1	2	3	4	1	$\cdots$	$\cdots$
3	4	1	2	3	4	1	2	$\cdots$	$\cdots$
4	1	2	3	4	1	2	3	$\cdots$	$\cdots$
1	2	3	4	1	2	3	4	$\cdots$	$\cdots$
2	3	4	1	2	3	4	1	$\cdots$	$\cdots$
3	4	1	2	3	4	1	2	$\cdots$	$\cdots$
4	1	2	3	4	1	2	3	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$

Figura 7.7:

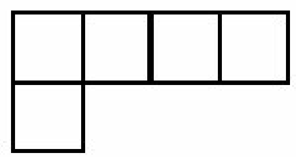


Figura 7.8:

Problema 7.54 En la siguiente suma, a, b, c, y d representan dígitos distintos. Calcula la suma de todos los posibles valores del número de cuatro cifras $cdbc$.

$$\begin{array}{r} abca \\ +\ cad \\ \hline cdbc \end{array}$$

Problema 7.55 En un juego de dos personas, los jugadores toman, alternadamente, 1, 2, 3, 4 o 5 fichas de una pila que inicialmente tiene 2003 fichas. Gana el jugador que toma la última ficha de la pila. Si Alinne y Servando juegan de este modo, y Alinne inicia, ¿quién se puede asegurar la victoria independientemente de lo que haga el otro? Explica qué pasos debe seguir esta persona para ganar.

7.1.9. Tercera etapa (2003)

Problema 7.56 Se tienen 100 puntos sobre una recta. Cada uno de ellos es pintado de rojo o azul. Si dos puntos vecinos son rojos, pintamos de rojo el segmento que los une. Si dos puntos vecinos son azules, pintamos de azul el segmento que los une. Finalmente, si dos puntos vecinos tienen colores distintos, pintamos de verde el segmento que los une. Después de hacer esto, existen exactamente 20 segmentos verdes. El punto del extremo izquierdo es rojo. ¿Es posible determinar con estos datos el color del punto del extremo derecho? En caso afirmativo, ¿cuál es el color de este punto?

Problema 7.57 Se escriben siete números naturales en una circunferencia. Para cada par de números vecinos se sabe que uno de ellos divide al otro. Prueba que hay dos números no vecinos con la misma propiedad (es decir, que uno divide al otro).

Problema 7.58 Sean $ABCD$ un cuadrado, M el punto medio de AD y E un punto cualquiera sobre el lado AB. P es la intersección de EC y MB. Demuestra que la recta DP divide al segmento EB en dos segmentos de igual longitud.

Problema 7.59 Se tienen 60 cajas numeradas del 1 al 60 y 60 pelotas numeradas del 1 al 60.
a) ¿De cuántas formas se puede colocar exactamente una pelota en cada caja de manera que en cada caja cuyo número sea múltiplo de 3 quede una pelota cuyo número también es múltiplo de 3?
b) ¿De cuántas formas se puede colocar exactamente una pelota en cada caja de manera que en cada caja cuyo número sea múltiplo de 3 quede una pelota cuyo número también es múltiplo de 3 y que en cada caja con número par quede una pelota con número par?

Problema 7.60 Un apicultor tiene 55 pequeñas abejas en una caja cúbica de 1m de lado. Prueba que en cualquier momento hay al menos tres abejas que pueden ser encerradas en una esfera de radio 1/3 m.

7.1.10. Cuarta etapa (2003)

Problema 7.61 En un triángulo ABC el ángulo interno del vértice B mide 120°. La prolongación de la bisectriz de este ángulo interseca al circuncírculo del triángulo ABC en el punto D. Si I es el incentro del triángulo ABC, prueba que $AC = DI$.

Problema 7.62 Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales es posible formar un rectángulo de 9×10 usando piezas de $1 \times n$.

Problema 7.63 Un dragón tiene 3996 cabezas. Un caballero tiene una espada capaz de cortar 300 cabezas, pero cuando la usa, surgen inmediatamente otras 84 cabezas; y tiene otra espada capaz de cortar 100 cabezas, pero cuando la usa, surgen inmediatamente otras 370 cabezas. ¿Puede el caballero, a través de una sucesión de golpes de sus espadas, reducir el número de cabezas del dragón a 1998? ¿Cómo?

Problema 7.64 En un condominio serán construidas seis casas de un mismo lado de una calle. Las casas pueden ser de ladrillo o de madera, pero como medida de seguridad contra incendios, dos casas de madera no pueden ser vecinas. ¿De cuántas formas se puede planear la construcción de las casas de este condominio?

Problema 7.65 En un triángulo acutángulo ABC, el ángulo interno del vértice A mide 30°. Los puntos B_1 y C_1 son los pies de las alturas trazadas por B y C respectivamente, y los puntos B_2 y C_2 son los puntos medios de los lados AC y AB respectivamente. Demuestra que los segmentos B_1C_2 y B_2C_1 son perpendiculares.

Problema 7.66 Sean n y m números naturales. Probar que si $m^n - 1$ divide a $m^n + n^m$, entonces también divide a $m^m + n^n$.

7.1.11. Examen final (2003)

Problema 7.67 Se tiene un segmento AB cuyo punto medio es M. Sobre el segmento AM se eligen 100 puntos, todos distintos de A y de M. A continuación, sobre el segmento MB se eligen los 100 puntos que son los simétricos respecto a M de los puntos elegidos sobre el segmento AM (es decir, por cada punto P que hayamos elegido en el segmento AM, se elige el punto Q sobre MB tal que $PM = MQ$). De estos doscientos puntos, cien se colorean de rojo y los demás de azul. Prueba que la suma de las distancias desde A a los puntos rojos es igual a la suma de las distancias desde B a los puntos azules.

Problema 7.68 En un triángulo acutángulo ABC se toma un punto D sobre el lado BC. Sean O y P los circuncentros de los triángulos ABD y ADC, respectivamente. Sean M y N los ortocentros de los triángulos ABD y ADC, respectivamente. Prueba que el triángulo AOP es semejante al triángulo DMN.

Problema 7.69 Sea p un número primo dado. Encuentra todos los números enteros k para los cuales $\sqrt{k^2 - kp}$ es un natural.

Problema 7.70 Supongamos que los números del 1 al 1998 se han dividido en 999 parejas de números de tal manera que, para cada pareja, el valor absoluto de la diferencia de los números que la forman es 1 o 6. Prueba que la suma de los valores absolutos de las 999 diferencias termina en 9.

Problema 7.71 ¿Para cuáles números naturales n es posible dividir un triángulo equilátero en n triángulos equiláteros (no necesariamente del mismo tamaño)?

Problema 7.72 Sobre los lados AB y AC de un triángulo acutángulo ABC se construyen los semicírculos exteriores al triángulo que tienen a estos dos segmentos como diámetros. Las alturas correspondientes a B y a C en el triángulo ABC cortan a estos semicírculos en los puntos P y Q, respectivamente. Prueba que $AP = AQ$.

7.1.12. Exámenes de práctica (2003)

Problema 7.73 ¿Será posible formar un rectángulo usando los cinco tetraminós de la figura 7.9?

Problema 7.74 ¿Cuántos enteros positivos de cinco cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si sólo el dígito 5 puede repetirse?

Problema 7.75 ¿Cuántos números del 1 al 1000000 hay en los cuales no aparecen dos cifras iguales juntas?

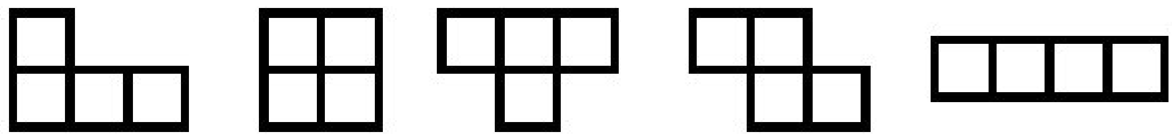


Figura 7.9:

Problema 7.76 A un ascensor suben 8 personas. ¿De cuántas maneras pueden éstas bajarse en cuatro pisos diferentes si:
(a) en cada piso sale por lo menos una persona?
(b) en algún piso puede no salir nadie?

Problema 7.77 Encuentra todas las parejas de enteros positivos a y b tales que $mcm(a,b) = 80$.

Problema 7.78 ¿Cuántos enteros positivos menores que 100000 satisfacen que el producto de sus cifras es igual a 243?

Problema 7.79 Se tienen 2003 calcetines de cuarenta colores distintos. ¿Cuál es el mínimo número de calcetines que se deben sacar para garantizar que habrá cinco calcetines del mismo color?

Problema 7.80 Dos cajas contienen entre las dos 65 canicas de tamaños diferentes. Cada canica es de color blanco, negro, rojo o amarillo. Además, si se toman cinco canicas del mismo color, dos de ellas siempre son del mismo tamaño (es decir, del mismo radio). Prueba que hay al menos tres canicas en la misma caja que tienen el mismo color y el mismo tamaño.

Problema 7.81 Sea ABC un triángulo cualquiera y sean D y E los puntos medios de los segmentos AB y AC respectivamente. Si G es el punto de intersección de las rectas BE y CD, prueba que

$$\frac{EG}{GB} = \frac{DG}{GC} = \frac{1}{2}.$$

Problema 7.82 Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O. Sean D y E los puntos de intersección de AO con BC y BO con AC, respectivamente. Las rectas AO y BO intersecan a la circunferencia por segunda vez en los puntos G y F respectivamente. Calcula la medida de los ángulos $\angle AOB$, $\angle AEF$ y $\angle BDA$ en términos de la de los ángulos $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle ACB$ (es decir, encuentra fórmulas para calcular los ángulos pedidos en las que sólo aparezcan β, γ y números conocidos, por ejemplo, algo del estilo de $\frac{180^\circ - \beta + \gamma}{4}$).

7.2. Concursos nacionales de la OMM

7.2.1. I Olimpiada mexicana de matemáticas (1987)

Problema 7.83 Demuestre que si dos fracciones son irreducibles (simplificadas) y su suma es un entero, entonces ambas fracciones tienen el mismo denominador o la suma de sus denominadores es 0.

Problema 7.84 ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20! ($20! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 19 \times 20$)?

Problema 7.85 Considere dos rectas paralelas l y l_1, y un punto fijo P que dista lo mismo de l que de l_1. ¿Qué lugar geométrico describen los puntos M que son proyección de P sobre AB, donde A está en l, B está en l_1 y el ángulo APB es recto?

Problema 7.86 Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 100, y que tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

Problema 7.87 Considere un triángulo rectángulo ABC donde la hipotenusa es BC. M es un punto en BC y P y Q son las proyecciones de M sobre AB y AC, respectivamente. Pruebe que para ninguno de tales puntos M son iguales las áreas del triángulo BPM, del triángulo MQC y del rectángulo $AQMP$.

Problema 7.88 Demuestre que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es un múltiplo de 3,804.

Problema 7.89 Demuestre que si n es un entero positivo, entonces $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es una fracción irreducible (simplificada).

Problema 7.90 (a) Tres rectas en el espacio l, m y n concurren en el punto S y un plano perpendicular a m corta a l, m y n en A, B y C, respectivamente. Suponga que los ángulos ASB y BSC son de $45°$ y que el ángulo ABC es recto. Calcule el ángulo ASC.
(b) Si un plano perpendicular a l corta a l, m y n en P, Q y R, respectivamente y $SP = 1$, calcule los lados del triángulo PQR.

7.2.2. II Olimpiada mexicana de matemáticas (1988)

Problema 7.91 ¿ De cuántas formas se pueden acomodar en línea recta siete pelotas blancas y cinco negras de tal forma que no estén dos pelotas negras juntas?

Problema 7.92 Si a y b son enteros positivos, pruebe que 19 divide a $11a+2b$ si y sólo si 19 divide a $18a + 5b$.

Problema 7.93 Considere dos circunferencias tangentes exteriormente y de radios distintos; sus tangentes comunes forman un triángulo. Calcule el área de dicho triángulo en términos de los radios de las circunferencias.

Problema 7.94 ¿De cuántas formas se pueden escoger ocho enteros $a_1, a_2, \ldots, a_8$ no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8 \leq 8$?

Problema 7.95 Si a y b son enteros positivos primos relativos y n es un entero, pruebe que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$.

Problema 7.96 Considere dos puntos fijos B y C de una circunferencia . Encuentre el lugar geométrico de las intersecciones de las bisectrices de los triángulos ABC, cuando A es un punto que recorre C.

Problema 7.97 Si A y B son subconjuntos ajenos del conjunto $\{1, 2, \ldots, m-1, m\}$ y la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B, pruebe que el número de elementos de A y también de B es menor que $m/\sqrt{2}$.

Problema 7.98 Calcule el volumen de un octaedro que circunscribe a una esfera de radio uno.

7.2.3. III Olimpiada mexicana de matemáticas (1989)

Problema 7.99 Considere un triángulo ABC en el que la longitud AB es 5, las medianas por A y por B son perpendiculares entre sí y el área es 18. Halle las longitudes de los lados BC y AC.

Problema 7.100 Encuentre dos números enteros positivos a y b tales que,
b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3 y
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

Problema 7.101 Pruebe que no existe un número entero positivo de 1989 cifras que fenga al menos tres de ellas iguales a 5 y tal que la suma de todas sus cifras sea igual al producto de las mismas.

Problema 7.102 Encuentre el entero positivo más pequeño tal que si su expansión decimal es $n = a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ y si r es el número cuya expansión decimal es $r = a_1 a_0 a_m a_{m-1} \ldots a_2 0$, entonces r es el doble de n.

Problema 7.103 Sean C_1 y C_2 dos círculos tangentes de radio 1 dentro de un círculo C de radio 2. Sea C_3 un círculo dentro de C tangente a cada uno de los círculos C, C_1 y C_2. Demuestre que los centros de C, C_1, C_3 y C_4 son los vértices de un rectángulo.

Problema 7.104 Siguiendo las líneas de la figura 7.10, ¿cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B que no pasen dos veces por el mismo punto y que sólo avancen hacia abajo y hacia los lados, pero no hacia arriba?

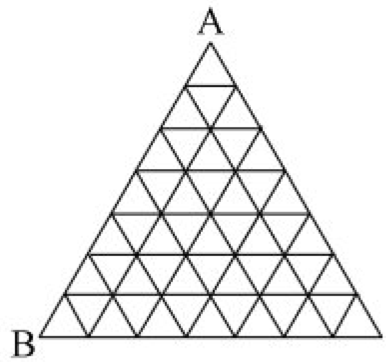


Figura 7.10:

7.2.4. IV Olimpiada mexicana de matemáticas (1990)

Problema 7.105 Encuentre el total de caminos que hay del punto A a la línea l en la red de la figura 7.11, si en un camino sólo está permitido ir hacia la izquierda.

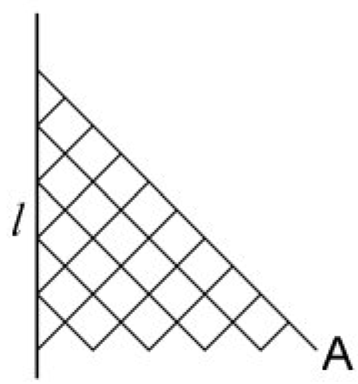


Figura 7.11:

Problema 7.106 Sea ABC un triángulo rectángulo con angúlo recto en B y sea H el punto de intersección del lado AC y la altura por B. Llamemos r, r_1 y r_2 a los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, ABH y HBC, respectivamente. Encuentre una igualdad que relacione a r, r_1 y r_2.

Problema 7.107 Pruebe que $n^{n-1} - 1$ es divisible entre $(n-1)^2$ para todo entero $n \geq 2$.

Problema 7.108 Considere las 27 fichas de dominó que quedan quitando la blanca-blanca. Tomando en cuenta los puntos que hay en una ficha, a cada ficha le corresponde un número racional menor o igual que uno. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

Problema 7.109 Si $P_1, P_2, \ldots, P_{19}$ son 19 puntos del plano con coordenadas enteras, tales que cada tres de ellos no son colineales, demuestre que hay tres de ellos con la propiedad de que su baricentro (punto de intersección de las medianas de un triángulo), también tiene coordenadas enteras.

Problema 7.110 Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Sea l cualquier línea que pase por B y que corte al lado AC en un punto E. Sean F el punto medio de EC, G el punto medio de CB y H el pie de la altura de C, en AB, en el triángulo ABC. Si I denota el circuncentro del triángulo AEH (punto de intesección de las mediatrices de los lados), pruebe que los triángulos IGF y ABC son semejantes.

7.2.5. V Olimpiada mexicana de matemáticas (1991)

Problema 7.111 Calcule la suma de todas las fracciones positivas irreducibles (simplificadas) menores que uno cuyo denominador es 1991.

Problema 7.112 Una compañía de n soldados es tal que
(1) n es un número capicúa (es decir, se lee de la misma manera al derecho que al revés, por ejemplo 12421 ó 523325),
(2) Si los soldados se forman:
(i) de 3 en 3, quedan 2 soldados en la última fila,
(ii) de 4 en 4, quedan 3 soldados en la última fila,
(iii) de 5 en 5, quedan 5 soldados en la última fila,
(a) ¿Cuál es el mínimo número n tal que se satisfacen (1) y (2).
(b) Demuestre que hay una infinidad de números n que satisfacen (1) y (2).

Problema 7.113 Se tienen cuatro canicas de radio uno colocadas en el espacio de tal manera que cada una de ellas es tangente a las otras 3. ¿Cuál es el radio de la menor esfera que contiene a las canicas?

Problema 7.114 Considere un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el que las diagonales AC y BD se cortan formando ángulo recto. Sean M, N, R y S los puntos medios de los segmentos AB, BD, CD y AD, respectivamente. Sean W, X, Y y Z las proyecciones de los puntos M, N, R y S sobre las rectas DC, AD, AB y BC, respectivamente. Pruebe que todos los puntos M, N, R, S, W, X, Y, y Z están sobre una misma circunferencia.

Problema 7.115 La suma de los cuadrados de dos números consecutivos pueden ser un cuadrado perfecto, por ejemplo $3^2 + 4^2 = 5^2$.
(a) Pruebe que la suma de los cuadrados de m enteros consecutivos no puede ser un cuadrado para $m = 3$ y $m = 6$.
(b) Encuentre un ejemplo de 11 números positivos consecutivos cuya suma de cuadrados sea un cuadrado perfecto.

Problema 7.116 En un polígono de n lados ($n \geq 4$) se considera una familia T de triángulos formados con los vértices del polígono con la propiedad de que cada dos triángulos de la familia cumplen una de las siguientes dos condiciones:
(a) No tienen vértices en común,
(b) Tienen 2 vértices en común.
Demuestre que T tiene a lo más n triángulos.

7.2.6. VI Olimpiada mexicana de matemáticas (1992)

Problema 7.117 Un tetraedro $OPQR$ es tal que los ángulos POQ, POR y QOR son rectos. Muestre que si X, Y, Z son los puntos medios de PQ, QR y RP, entonces el tetraedro $OXYZ$ tiene sus cuatro caras iguales.

Problema 7.118 Sea p un número primo, encuentre todas las cuartetas (a, b, c, d) distintas con a, b, c y d enteros y $0 \leq a, b, c, d \leq p-1$ tales que $ad - bc$ sea múltiplo de p.

Problema 7.119 Considere siete puntos dentro o sobre un hexágono regular y pruebe que tres de ellos forman un triángulo cuya área es menor o igual que $1/6$ del área del hexágono.

Problema 7.120 Muestre que 100 divide a $1 + 11^{11} + 111^{111} + \cdots + 1111111111^{1111111111}$.

Problema 7.121 Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Si $S = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3}$, pruebe que $6 < S \leq 3\sqrt{5}$.

Problema 7.122 Sea $ABCD$ un rectángulo. Sean I el punto medio de CD y M la intersección de BI con la diagonal AC.
(a) Pruebe que DM pasa por el punto medio de BC.
(b) Sea E un punto exterior al rectángulo tal que ABE sea un triángulo isósceles y rectángulo en E. Además, supongamos que $BC = BE = a$. Pruebe que ME es bisectriz del ángulo AMB.
(c) Calcule el área del cuadrilátero $AEBM$ en función de a.

7.2.7. VII Olimpiada mexicana de matemáticas (1993)

Problema 7.123 Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Se construyen exteriormente a éste triángulos rectángulos isósceles AEC y ADB con hipotenusas AC y AB respectivamente. Sea O el punto medio de BC y sean E' y D' los puntos de intersección de OE y OD con DB y EC, respectivamente. Calcule el área del cuadrilátero $DED'E'$ en función de los lados del triángulo ABC.

Problema 7.124 Encuentre los números del 100 al 999 tales que la suma de los cubos de sus dígitos sea igual al número.

Problema 7.125 Dentro de un pentágono de área 1993 se encuentran 995 puntos. Considere esos puntos junto con los vértices del pentágono. Muestre que de todos los triángulos que se pueden formar con los 1000 puntos anteriores, hay al menos uno de área menor o igual a uno.

Problema 7.126 Para cualquier número entero $n \geq 0$ se define:
(i) $f(n, 0) = 1$ y $f(n, n) = 1$.
(ii) $f(n, k) = f(n-1, k-1) + f(n-1, k)$ para $0 < k < n$. ¿Cuántos cálculos se tienen que hacer para encontrar el valor de $f(3991, 1993)$, sin contar aquéllos de la forma $f(n, 0)$ y $f(n, n)$?

Problema 7.127 Por un punto O de una circunferencia se tienen tres cuerdas que sirven como diámetros de tres circunferencias. Además del punto común O, las circunferencias se intersecan por parejas en otros tres puntos. Demuestre que tales puntos son colineales.

Problema 7.128 Sean $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$ y p un número impar. Pruebe que existe un entero n tal que p divide a $f(n)$ si y sólo si existe un entero m tal que p divide a $m^2 - 5$.

7.2.8. VIII Olimpiada mexicana de matemáticas (1994)

Problema 7.129 La colección infinita de números $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, \ldots$ se ha formado de la siguiente manera: se coloca primero el primer impar (1), luego los siguientes dos pares (2,4), después los siguientes tres impares (5,7,9), luego los cuatro pares siguientes al último impar que se colocó y así sucesivamente. Encuentra el término de la secuencia más cercano a 1994.

Problema 7.130 Los doce números de un reloj se desprendieron y al colocarlos nuevamente se cometieron algunos errores. Demuestre que en la nueva colocación hay un número que al sumarle los dos números que quedaron a sus lados se obtiene un resultado mayor o igual a 21.

Problema 7.131 Considere un paralelogramo $ABCD$ (con AB paralela a CD y BC paralela a DA), sobre la prolongación del lado AB encuentre un punto E, de manera que $BE = BC$ (y con B entre A y E). Por E, trace una perpendicular a la línea AB, ésta se encontrará en un punto F con la línea que pasa por C y es perpendicular a la diagonal BD. Muestre que AF divide en dos ángulos iguales al ángulo DAB.

Problema 7.132 Un matemático caprichoso escribe un libro que tiene páginas de la 2 a la 400 y que debe ser leído de la siguiente manera: Primero deberán leerse todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con 400 (por suerte, éstas se leen en orden normal de menor a mayor). Una vez leídas éstas, se toma el último número de las que no se han leído (en este caso 399) y entonces se leen todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes. Este proceso (tomar el último número de las que no se han leído y leer las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes) continúa hasta terminar de leer el libro. ¿Cuál es el número de la última página que se debe leer?

Problema 7.133 Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo (cada uno de sus ángulos es menor que $180°$) y considere los pies de las alturas de los cuatro triángulos que se pueden formar con los vértices A,

B, C y D. Demuestre que no importa que cuadrilátero convexo se tome, alguno de estos 12 puntos se encuentra sobre un lado del cuadrilátero.

Problema 7.134 Sea C una cuadrícula de 10×10. Considere piezas de las formas mostradas en la figura 7.12, donde en estas piezas, cada cuadrado es de 1×1. Demuestre que:

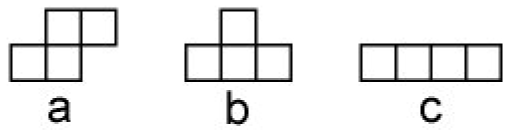


Figura 7.12:

(i) C no se puede cubrir completamente con 25 piezas de la forma (a),
(ii) C no se puede cubrir completamente con 25 piezas de la forma (b),
(iii) C no se puede cubrir completamente con 25 piezas de la forma (c).

7.2.9. IX Olimpiada mexicana de matemáticas (1995)

Problema 7.135 En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y sólo a éstos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?

Problema 7.136 Considera 6 puntos en el plano con la propiedad de que 8 de las distancias entre ellos son iguales a 1. Muestra que al menos tres de los puntos forman un triángulo equilátero de lado 1.

Problema 7.137 Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular; sean AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB. Sea N la intersección de AC y BD. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

Problema 7.138 (a) Encuentra un subconjunto B del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ de manera que B tenga 26 elementos y que ningún producto de dos elementos de B sea un cuadrado perfecto.
(b) Demuestra que no se puede obtener un subconjunto de A de 27 elementos con la característica mencionada en (a).

Problema 7.139 Sea $ABCDE$ un pentágono convexo de manera que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA, y EAB son todos de igual área. Demuestra que: $\frac{1}{4}$área$(ABCDE) <$ área$(ABC) <$ $\frac{1}{3}$área$(ABCDE)$.

Problema 7.140 Sobre los cuadrados de una cuadrícula de 4×4 se colocan símbolos 0 y 1; estos símbolos se cambian uno por el otro al aplicar alguna de las siguientes tres operaciones: La operación (a) cambia de símbolos todos los elementos de un renglón. La operación (b) cambia de símbolos todos los elementos de una columna. La operación (c) cambia de símbolos todos los elementos de una diagonal (las diagonales son las que se muestran con líneas punteadas en la figura 7.13). Determina

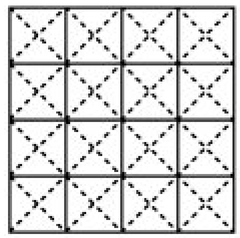


Figura 7.13:

cuáles son los arreglos de los que se puede partir para que con un número finito de operaciones se pueda llegar a un arreglo de puros símbolos 0.

7.2.10. X Olimpiada mexicana de matemáticas (1996)

Problema 7.141 Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean P y Q los puntos de trisección de la diagonal BD (es decir, P y Q son los puntos del segmento BD para los cuales las longitudes BP, PQ y QD son todas iguales). Sea E la intersección de la recta que pasa por A y P con el segmento BC y sea F la intersección de la recta que pasa por A y Q con el segmento DC. Demuestra lo siguiente:
(i) Si $ABCD$ es paralelogramo, entonces E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD.
(ii) Si E y F son los puntos medios de BC y CD, respectivamente, entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 7.142 Bordeando una mesa circular hay dibujadas 64 casillas y en cada una hay una ficha. Las fichas y las casillas están numeradas del 1 al 64 en orden sucesivo (cada ficha está en la casilla que lleva el mismo número). En la parte central de la mesa hay 1996 focos apagados. Cada minuto todas las fichas se desplazan simultáneamente, en forma circular (en el el mismo sentido de la numeración), como sigue: la ficha #1 se desplaza una casilla, la ficha #2 se desplaza dos casillas, la ficha #3 se desplaza tres casillas, etcétera, pudiedo varias fichas ocupar la misma posición. Cada vez que una ficha comparte el lugar en una casilla con la ficha #1, se prende uno de los focos (se prenden tantos focos como fichas estén compartiendo la posición con la ficha #1 en ese momento). ¿En dónde estará la ficha #1 en el primer momento en que ya todos los focos estén prendidos?

Problema 7.143 Demuestra que no es posible cubrir una cuadrícula de 6×6 con 18 rectángulos de 2×1, de tal manera que cada una de las rectas de longitud 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos. Demuestra también que sí es posible cubrir una cuadrícula de 6×5 con 15 rectángulos de 2×1, de tal manera que cada una de las rectas de longitudes 5 o 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos.

Problema 7.144 ¿Para qué enteros $n \geq 2$ se pueden acomodar los números del 1 al 16 en los cuadros de una cuadrícula de 4×4 (un número en cada cuadro, sin repetir números) de tal manera que las 8 sumas de los números que quedan en cada fila y en cada columna sean múltiplos de n, y que estos 8 múltiplos sean todos distintos entre sí?

Problema 7.145 En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del $1aln^2$ en el orden habitual (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, como se ilustra en la figura 7.14 para el caso $n = 3$). Llamamos camino en la cuadrícula a una sucesión de pasos de un cuadro a otro, desde el cuadro que

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 7.14:

tiene el número 1 hasta el que tiene el número n^2, de tal manera que en cada paso el movimiento sea hacia la derecha o hacia abajo. Si C es un camino, denotamos por $L(C)$ a la suma de los números por los que pasa el camino C. (i) Sea M la mayor $L(C)$ que se puede obtener de entre todos los caminos C en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$ y sea m la menor $L(C)$ (también de entre todos los caminos C en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$). Prueba que $M - m$ es un cubo perfecto. (ii) Prueba que en ninguna cuadrícula hay un camino C tal que $L(C) = 1996$.

Problema 7.146 En la figura 7.15 se muestra un triángulo acutángulo ABC en el que la longitud de AB es menor que la de BC y la longitud de BC es menor que la de AC. Los puntos A', B', y C' son tales que AA' es perpendicular a BC y la longitud de AA' es igual a la de BC; BB' es perpendicular a AC y la longitud de BB' es igual a la de AC; CC' es perpendicular a AB y la longitud de CC' es igual a la de AB. Además el ángulo $\angle AC'B$ es de 90°. Demuestra que A', B' y C' están alineados.

7.2.11. XI Olimpiada mexicana de matemáticas (1997)

Problema 7.147 Encuentra todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también sea un primo positivo.

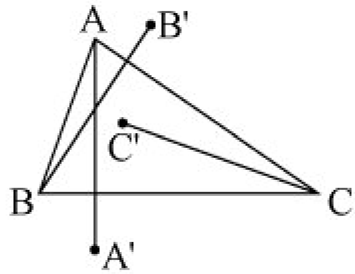


Figura 7.15:

Problema 7.148 En un triángulo ABC sean P y P' sobre el segmento BC, Q sobre el segmento CA y R sobre el segmento AB, de tal forma que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}.$$

Sea G el centroide de ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demostrar que los puntos P, G y K son colineales.

Problema 7.149 En una cuadrícula de 4×4 se van a colocar los números enteros del 1 al 16 (uno en cada cuadrito).
(i) Prueba que es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 4.
(ii) Prueba que no es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 3.

Problema 7.150 Dados 3 puntos no alineados en el espacio, al único plano que los contiene le llamamos *plano determinado* por los puntos. ¿Cuál es el mínimo número de planos determinados por 6 puntos en el espacio si no hay 3 alineados y no están los 6 en un mismo plano?

Problema 7.151 Sean P, Q y R puntos sobre los lados de un triángulo ABC con P en el segmento BC, Q en el segmento AC y R en el segmento BA, de tal manera que si A' es la intersección de BQ con CR, B' es la intersección de AP con CR, y C' es la intersección de AP con BQ, entonces $AB' = B'C'$, $BC' = C'A'$ y $CA' = A'B'$. Calcular el cociente del área de PQR entre el área de ABC.

Problema 7.152 Probar que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

donde n y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

7.2.12. XII Olimpiada mexicana de matemáticas (1998)

Problema 7.153 Un número es *suertudo* si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo, ya que $1900 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$. Encuentre una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.

Problema 7.154 Dos rayos l y m parten de un mismo punto formando un ángulo α, y sea P un punto en l. Para cada circunferencia $\mathcal{C}$ tangente a l en P que corte a m en puntos Q y R, sea T el punto donde la bisectriz del ángulo QPR corta a $\mathcal{C}$. Describa la figura geométrica que forman los puntos T. Justifique su respuesta.

Problema 7.155 Cada uno de los lados y las diagonales de un octágono regular se pinta de rojo o negro. Demuestre que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octágono y sus tres lados son del mismo color.

Problema 7.156 Encuentre todos los enteros que se escriben como

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{9}{a_9},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_9$ son dígitos distintos de cero que pueden repetirse.

Problema 7.157 Sean B y C dos puntos de una circunferencia, AB y AC las tangentes desde A. Sean Q un punto del segmento AC y P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J. Demuestre que PJ es paralelo a AB si y sólo si $BC^2 = AC \times CQ$.

Problema 7.158 Un plano en el espacio es *equidistante* a un conjunto de puntos si la distancia de cada punto al plano es la misma. ¿Cuál es el mayor número de planos equidistantes a 5 puntos de los cuales no hay 4 en un mismo plano?

7.2.13. XIII Olimpiada mexicana de matemáticas (1999)

Problema 7.159 Sobre una mesa hay 1999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuál de sus dos lados está hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes cosas:
(i) Retira un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba,
(ii) Voltea un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas tengan el mismo color hacer arriba.
Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo?

Problema 7.160 Demuestre que no existen 1,999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12,345.

Problema 7.161 Considere un punto P en el interior de el triángulo ABC. Sean D, E y F los puntos medios de AP, BP y CP, respectivamente y L, M y N los puntos de intersección de BF con CE, AF con CD y AE con BD, respectivamente.
(i) Muestre que el área del hexágono $DNELFM$ es igual a una tercera parte del área del triángulo ABC.
(ii) Muestre que DL, EM y FN concurren.

Problema 7.162 En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente 10 cuadritos y se han marcado los centros de éstos. El lado de cada cuadrito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados por una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$, o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia de $1/2$ de una orilla de la cuadrícula.

Problema 7.163 $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD. Las bisectrices exteriores de los ángulos B y C se intersecan en P. Las bisectrices exteriores de los ángulos A y D se intersecan en Q. Demuestre que la longitud de PQ es igual a la mitad del perímetro del trapecio $ABCD$.

Problema 7.164 Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestre que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que éstos se traslapen), entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

7.2.14. XIV Olimpiada mexicana de matemáticas (2000)

Problema 7.165 Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ circunferencias tales que $\mathcal{A}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{B}$ en P, $\mathcal{B}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{C}$ en Q, $\mathcal{C}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{D}$ en R y $\mathcal{D}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{A}$ en S. Supón que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ no se intersecan, ni tampoco $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.
(i) Prueba que los puntos P, Q, R y S están todos sobre una circunferencia.
(ii) Supón además que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ tienen radio 2, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ tienen radio 3 y la distancia entre los centros de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es 6. Determina el área del cuadrilátero $PQRS$.

Problema 7.166 Se construye un triángulo como el de la figura, pero empezando con los números del 1 al 2000. Cada número del triángulo —excepto los del primer renglón— es la suma de los dos números arriba de él. ¿Cuál es el número que ocupa el vértice inferior del triángulo? (Nota: Escribe tu respuesta final como producto de primos.)

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
& & 8 & & 12 & & 16 & & \\
& & & 20 & & 28 & & & \\
& & & & 48 & & & &
\end{array}$$

Problema 7.167 Dado un conjunto A de enteros positivos, construimos el conjunto A' poniendo todos los elementos de A y todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: Se escogen algunos elementos de A, sin repetir, y a cada uno de esos números se le pone el signo $+$ o el signo $-$; luego se suman esos números con signo y el resultado se pone en A'. Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, entonces algunos elementos de A' son 8 y 14 (pues 8 es elemento de A y $14 = 20 + 2 - 8$). A partir de A' construimos A'' de la misma manera que A' se construye a partir de A. Encontrar el mínimo número de elementos que necesita tener A si queremos que A'' contenga a todos los enteros del 1 al 40 (ambos inclusive).

Problema 7.168 Para a y b enteros positivos no múltiplos de 5, se construye una lista de números como sigue: El primer número es 5 y, a partir del segundo número, cada número se obtiene multiplicando el número que le precede (en la lista) por a y sumándole b. (Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, entonces los primeros tres números de la lista serían: 5, 14, 32 (pues $14 = (5 \times 2) + 4$ y $32 = (14 \times 2) + 4$). ¿Cuál es la máxima cantidad de primos que se pueden obtener antes de obtener el primer número no primo?

Problema 7.169 Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo (es decir, los cuadritos del rectángulo que eran negros se convierten en blancos y los que eran blancos, se convierten en negros). Encuentra para qué n's es posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario. (Nota: Las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir cambiando.)

Problema 7.170 Sea ABC un triángulo en el que $\angle ABC > 90°$ y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$, y BH es perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F. Prueba que $\angle BCF = \angle ACD$.

7.2.15. XV Olimpiada mexicana de matemáticas (2001)

Problema 7.171 Encuentra todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y de 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 o 7.

Problema 7.172 Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las paelotas que están fuera de ella son del mismo color.

Problema 7.173 En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente.

Se toma un punto S sobre el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Prueba que $AT = RC$.

Problema 7.174 Dados dos enteros positivos n y a se forma una lista de 2001 números como sigue: El primer número es a; a partir del segundo cada número es el residuo que se obtiene al dividir el cuadrado del anterior entre n. A los números de la lista se les ponen los signos $+$ y $-$ alternadamente empezando con $+$. Los números con signo así obtenidos se suman y a esa suma se le llama *suma final* para n y a. ¿Para qué enteros $n \geq 5$ existe alguna a tal que $2 \leq a \leq n/2$ y la suma final para n y a es positiva?

Problema 7.175 Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$ y el ángulo BAC es el doble del ángulo BCA. Sobre el lado AC se toma un punto D tal que $CD = AB$. Por el punto B se traza una recta l paralela a AC. La bisectriz exterior del ángulo en A interseca a l en el punto M, y la paralela a AB por el punto C interseca a l en el punto N. Prueba que $MD = ND$.

Problema 7.176 Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, \ldots, n$ (tiene muchas monedas de cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:
(a) En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.
(b) Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.
(c) Para cualesquiera dos cajas sucede que entre las dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.
(d) No existe una denominación tal que todas las cajas tengan una moneda de esa denominación.
¿Para qué valores de n puede el coleccionista hacer lo que se propone?

7.2.16. XVI Olimpiada mexicana de matemáticas (2002)

Problema 7.177 En una cuadrícula de 32×32 se escriben los números del 1 al 1024 de izquierda a derecha, con los números del 1 al 32 en el primer renglón, los del 33 al 64 en el segundo, etc.
La cuadrícula se divide en cuatro cuadrículas de 16×16 que se cambian de lugar entre ellas como sigue:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline d & a \\ \hline c & b \\ \hline \end{array}$$

Después, cada cuadrícula de 16×16 se divide en cuatro cuadrículas de 8×8 que se cambian de lugar del mismo modo; a su vez cada una de ésas se divide y así sucesivamente hasta llegar a cuadrículas de 2×2 que se dividen en cuadros de 1×1, los cuales se cambian de lugar del mismo modo.
Al terminar estas operaciones, ¿qué números quedan en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha en la cuadrícula de 32×32?

Problema 7.178 Sean $ABCD$ un paralelogramo y $\mathcal{K}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABD. Sean E y F las intersecciones de $\mathcal{K}$ con los lados (o sus prolongaciones) BC y CD respectivamente (E distinto de B y F distinto de D). Demuestra que el circuncentro del triángulo CEF está sobre $\mathcal{K}$.

Problema 7.179 Sea n un entero positivo. ¿Tiene n^2 más divisores positivos de la forma $4k+1$ o de la forma $4k-1$?

Problema 7.180 Una ficha de dominó tiene dos números (no necesariamente diferentes) entre 0 y 6. Las fichas se pueden voltear, es decir, $\boxed{4\,|\,5}$ es la misma ficha que $\boxed{5\,|\,4}$. Se quiere formar una hilera de fichas de dominó distintas de manera que en cada momento de la construcción de la hilera, la suma de todos los números de las fihas puestas hasta ese momento sea impar. Las fichas se pueden agregar de la manera usual a ambos extremos de la hilera, es decir, de manera que en cualesquiera dos fichas consecutivas aparezca el mismo número en los extremos que se juntan. Por ejemplo, se podría hacer la hilera: $\boxed{1\,|\,3}$ $\boxed{3\,|\,4}$ $\boxed{4\,|\,4}$, en la que se colocó primero la ficha del centro y luego la de la izquierda. Después de poner la primera ficha, la suma de todos los números es 7; después de poner la segunda, 11; después de la tercera, 19.
¿Cuál es la mayor cantidad de fichas que se pueden colocar en una hilera? ¿Cuántas hileras de esa longitud máxima se pueden construir?

Problema 7.181 Tres enteros distintos forman una terna *compatible* si alguno de ello, digamos n, cumple que cada uno de los otros dos es, o bien divisor, o bien múltiplo de n. Para cada terna compatible de números entre 1 y 2002 se calcula la suma de los tres números de la terna. ¿Cuál es la mayor suma obtenida? ¿Cuáles son las ternas en las que se obtiene la suma máxima?

Problema 7.182 Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y tal que el ángulo CMD es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo AKB es recto y que

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

7.2.17. XVII Olimpiada mexicana de matemáticas (2003)

Problema 7.183 Dado un número k de dos o más cifras, se forma otro entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser múltiplo de k.

Problema 7.184 Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea $\mathcal{Y}$ una circunferencia tangente a AC en B, y sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ las circunferencias de diámetros AB y BC respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Supón que la recta PQ corta a $\mathcal{X}$ en un punto R distinto de P, y que esa misma recta PQ corta a $\mathcal{Z}$ en un punto S distinto de Q. Demuestra que concurren AR, CS y la la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ por B.

Problema 7.185 En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan a muchachos y que a cada muchacho le gustan b muchachas. ¿Para qué valores de a y b es correcto afirmar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Problema 7.186

Problema 7.187

Problema 7.188

Total de problemas hasta ahora: 1015.