Soluciones Nivel 3

Individual

PARTE A

Problema 1. (Coahuila) En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

R:24.

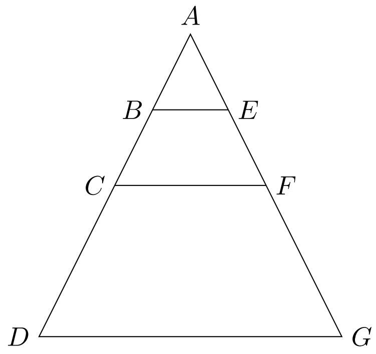
Solución. Como hay 9 monedas, tenemos $\binom{9}{2} = 36$ maneras de quitar dos monedas. Ahora, falta contar la cantidad de maneras en que se pueden quitar las dos monedas de casillas que comparten un lado, lo cual es equivalente a contar cuántas aristas tiene una cuadricula de 3×3 sin contar las del exterior. Es fácil ver que hay 12 de estas aristas, por lo que en total hay 24 maneras de quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado.

Problema 2. (Comité) Sean a, b y c enteros positivos diferentes tales que su suma y su producto son cuadrados perfectos. Determina el menor valor posible de $abc(a + b + c)$.

R:576.

Solución. Observemos que la terna $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$ satisface que $a+b+c = 16$ y $abc = 36$ son cuadrados perfectos. Demostraremos que el valor mínimo de $a + b + c$ es 16. Como a, b y c son distintos, tenemos que $a + b + c \geq 1 + 2 + 3 = 6$. Supongamos que $a + b + c = 9$. Las posibilidades de escribir a 9 como suma de tres enteros positivos distintos son: $1 + 2 + 6$, $1 + 3 + 5$ y $2 + 3 + 4$. Sin embargo, ninguno de los productos $1 \times 2 \times 6 = 12$, $1 \times 3 \times 5 = 15$ y $2 \times 3 \times 4 = 24$ es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, el valor mínimo de $a + b + c$ es 16.
Ahora, demostraremos que el valor mínimo del producto abc es 36. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $1 \leq a < b < c$.
Si $abc = 4$, entonces $4 = abc > a^3$, de donde $a \leq 1$. Luego, $a = 1$ y $bc = 4$, lo cual no es posible.
Si $abc = 9$, entonces $9 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o 2. Si $a = 1$, entonces $bc = 9$, lo cual no es posible. Si $a = 2$, entonces abc es par, lo que es una contradicción.
Si $abc = 16$, entonces $16 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o 2. Si $a = 1$, entonces $bc = 16$, de donde la única posibilidad es $b = 2$ y $c = 8$. Sin embargo, la suma $a + b + c = 1 + 2 + 8 = 11$ no es un cuadrado. Si $a = 2$, entonces $bc = 8$, lo cual no es posible.
Si $abc = 25$, entonces $25 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o $a = 2$. Si $a = 1$, entonces $bc = 25$, lo cual no es posible. Si $a = 2$, entonces abc es par, lo que es una contradicción.
El caso $abc = 36$ se puede obtener con $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.
Por lo tanto, el valor mínimo del producto $abc(a + b + c)$ es igual a $36 \times 16 = 576$.

Problema 3. (Michoacán) En la siguiente figura se sabe que la altura del triángulo ABE es la mitad de la altura del triángulo ACF, y a su vez la altura del triángulo ACF es la mitad de la altura del triángulo ADG. Si el perímetro del triángulo ABE es 7 cm y el perímetro del trapecio $CDGF$ es 22 cm, ¿cuál es el perímetro, en centímetros, del trapecio $BDGE$?



$\boxed{\text{R:}25.}$

Solución. Denotaremos por $P(X)$ al perímetro de la figura X. Por las proporciones entre las alturas, deducimos que $P(ACF) = 14$ cm, $P(ADG) = 28$ cm y $P(BCFE) = 11$ cm. Notemos entonces que:

$$\begin{aligned} 14 + 22 &= P(ACF) + P(CDGF) \\ &= AC + CF + FA + CD + DG + GF + FC \\ &= P(ADG) + 2CF \\ &= 28 + 2CF. \end{aligned}$$

De aquí, $CF = 4$ cm y, por lo tanto, $BE = 2$ cm. Finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} P(BDGE) &= BD + DG + GE + EB = (AD - AB) + DG + (GA - AE) + BE \\ &= P(ADG) - P(ABE) + 2BE \\ &= 28 - 7 + 4 \\ &= 25 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Problema 4. (Chiapas) ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos (distintos) se pueden escoger del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ de manera que el producto de los tres números no sea divisible entre 4?

$\boxed{\text{R:}345.}$

Solución. Observemos que hay dos formas de que el producto de los tres números no sea divisible entre 4: que los tres números sean impares o que haya exactamente un número par que no sea divisible por 4. En el primer caso hay $\binom{10}{3} = 120$ subconjuntos y en el segundo caso hay $5\binom{10}{2} = 225$ subconjuntos, por lo que en total hay $120 + 225 = 345$ subconjuntos que satisfacen la condición.

Problema 5. (Estado de México) La lista $1, x_2, x_3, \dots, x_n, 200$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de los anteriores, es decir,

$$x_3 = 1 + x_2,\ x_4 = 1 + x_2 + x_3,\ x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4$$

y así sucesivamente. Determina el valor de x_2.

$\boxed{\text{R:}24.}$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 + x_2,\\
x_4 &= 1 + x_2 + x_3 = 1 + x_2 + 1 + x_2 = 2(x_2+1)\\
x_5 &= 2^2(x_2+1)\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= 2^{n-2}(x_2+1).
\end{aligned}$$

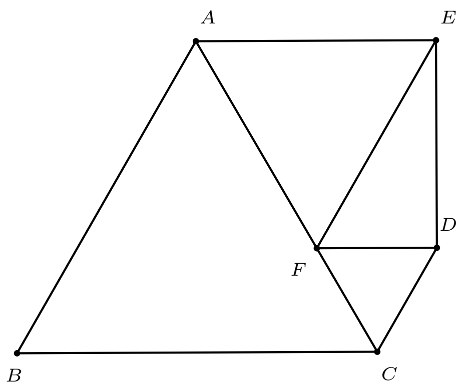
Como $x_{n+1} = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, resulta que $x_2 + 1 = 5^2$ y, por lo tanto, $x_2 = 24$.

Problema 6. (Nuevo León) Los números reales distintos a, b, c, d satisfacen que $a+c = b+d$ y $a+b+cd = c+d+ab$. Determina la suma de los posibles valores de $a+c$.

R:2.

Solución. Sea $n = a+c = b+d$. Entonces, $c = n-a$ y $d = n-b$. Luego, la segunda condición es $a+b+(n-a)(n-b) = (n-a)+(n-b)+ab$, esto es, $2a+2b-na-nb+n^2-2n = 0$, lo cual se factoriza como $(n-2)(n-a-b) = 0$. Esto implica que $n = 2$ o $n = a+b$. En el último caso, combinando con $n = a+c$ concluimos que $b = c$, lo cual es imposible. Luego, el único valor posible de n es 2. Haciendo $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$ y $d = 2$, obtenemos que $a+c = b+d = 2$ y $a+b+cd = c+d+ab = 5$. Por lo tanto, la respuesta es 2.

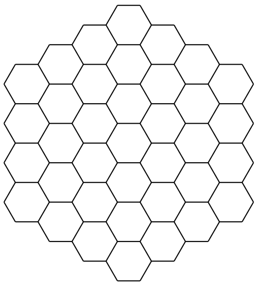
Problema 7. (Campeche) Sean ABC, AFE y CDF triángulos equiláteros como se muestra en la figura cuyas medidas de sus lados son 6 cm, 4 cm y 2 cm, respectivamente. Si el área del pentágono $ABCDE$ es x cm^2, encuentra el valor de x^2.



R:768.

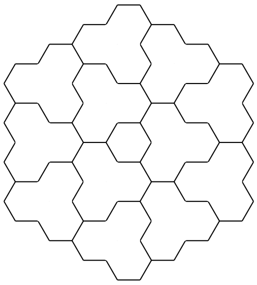
Solución. Notemos que $EF = 2FD$ y que $\angle DFE = 60°$. Esto implica que el triángulo EFD es la mitad de un triángulo equilátero, por lo que $\angle EDF = 90°$ y $ED = \sqrt{3}FD = 2\sqrt{3}$ cm. Luego, el área del pentágono $ABCDE$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABC, AFE, CDF y DFE, esto es, $x = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm^2 y, por lo tanto, $x^2 = 16^2(3) = 768$.

Problema 8. (Michoacán) En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?

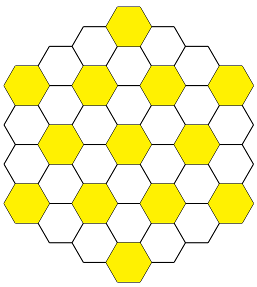


R:13.

Solución. En la siguiente partición de los hexágonos se tiene que a lo más un hexágono de cada parte puede estar coloreado.



Con lo anterior se demuestra que no pueden vivir más de 13 abejas en el panal. Con la siguiente elección nos podemos dar cuenta que sí pueden vivir 13 abejas en el panal.



Problema 9. (Sinaloa) Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1} + 1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

R:673

Solución. Basta observar el periodo módulo 9 de la transformación $x \mapsto 5x + 1$. Existen tres posibles órbitas, o ciclos:

$$0 \mapsto 1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 7 \mapsto 0$$
$$5 \mapsto 8 \mapsto 5$$
$$2 \mapsto 2$$

y con esto vemos que solo $2, 5, 8$ no están contenidos en la órbita de 0, por lo que son los únicos valores para los que ningún x_k será múltiplo de 9. Por lo tanto, basta que $x_0 \equiv 2 \pmod 3$, y hay 673 tales posibles valores menores que 2020.

Problema 10. (Comité) Sea $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Si el producto

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(3)}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{f(100)}\right)$$

puede escribirse como $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos primos relativos, encuentra el valor de $a + b$.

R:406.

Solución. Para cualquier entero positivo n tenemos que

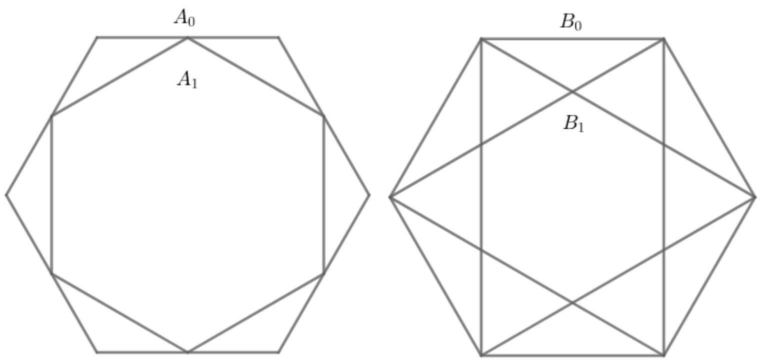
$$1 - \frac{2}{f(n)} = \frac{f(n) - 2}{f(n)} = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Por lo tanto, el producto buscado es un producto telescópico y es igual a

$$\left(\frac{1 \times 4}{2 \times 3}\right)\left(\frac{2 \times 5}{3 \times 4}\right)\left(\frac{3 \times 6}{4 \times 5}\right)\left(\frac{4 \times 7}{5 \times 6}\right)\cdots\left(\frac{99 \times 102}{100 \times 101}\right)\left(\frac{100 \times 103}{101 \times 102}\right) = \frac{1 \times 103}{3 \times 101} = \frac{103}{3(101)}.$$

Luego, la respuesta es $103 + 3(101) = 406$.

Problema 11. (Baja California) Los hexágonos regulares A_0 y B_0 tienen lados iguales a 1. Para cada entero positivo n, el hexágono regular A_n se construye uniendo los puntos medios de los lados del hexágono regular A_{n-1}. El hexágono regular B_n se construye traslapando dos triángulos equiláteros con vértices de B_{n-1}. En la siguiente figura se muestran los hexágonos regulares A_1 y B_1. La razón del área de A_{2020} entre el área de B_{2020} puede escribirse de la forma $(\frac{a}{b})^c$ donde a, b, c son enteros positivos y a, b son primos relativos. Si c toma el valor máximo posible, encuentra el valor de $\frac{c}{a+b}$.



R:808.

Solución. Nótese que, si $ABCDEF$ es un hexágono regular, entonces el área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{6}$ del área de $ABCDEF$. Luego, si M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente, el área del triángulo AMN es $\frac{1}{24}$ del área de $ABCDEF$. Esto implica que

$$[A_{i+1}] = [A_i] - 6 \times \frac{1}{24}[A_i] = \frac{3}{4}[A_i]$$

donde $[A_i]$ representa el área del hexágono A_i. Así, $[A_{2020}] = \left(\frac{3}{4}\right)^{2020}[A_0]$. Por otro lado, las diagonales BD y BF trisecan la diagonal AC en el hexágono regular $ABCDEF$. Esto implica que, en la figura del hexágono B_0, los doce triangulitos tienen la misma área y, más aún, el área total de tres de ellos es igual a $\frac{1}{6}$ del área de B_0. Luego,

$$[B_{i+1}] = [B_i] - 4 \times \frac{1}{6}[B_i] = \frac{1}{3}[B_i].$$

De aquí se obtiene que $[B_{2020}] = \left(\frac{1}{3}\right)^{2020} [B_0]$. Por lo tanto, como $[A_0] = [B_0]$, se sigue que

$$\frac{[A_{2020}]}{[B_{2020}]} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2020}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2020}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4040}.$$

Por lo tanto, la respuesta es $\frac{4040}{3+2} = \frac{4040}{5} = 808$.

Problema 12. (Tabasco) El número de mi casa tiene cuatro dígitos diferentes. Si se suman todos los números que se pueden formar con tres de esos cuatro dígitos, se obtiene un total igual al cuadrado de la suma de esos cuatro dígitos multiplicado por mi edad e igual al número de mi casa multiplicado por $\frac{36}{13}$. Encuentra el cociente del número de mi casa entre mi edad.

R:117.

Solución. Sea $abcd$ el número de mi casa, donde a, b, c, d son dígitos distintos. El total de números que se pueden formar con los cuatro dígitos a, b, c, d tomados de tres en tres es igual a 24 y son $abc, acb, bac, bca, cab, cba, \ldots, dcb$. La suma de estos 24 números es igual a

$$6(100a + 100b + 100c + 100d + 10a + 10b + 10c + 10d + a + b + c + d) = 666(a + b + c + d).$$

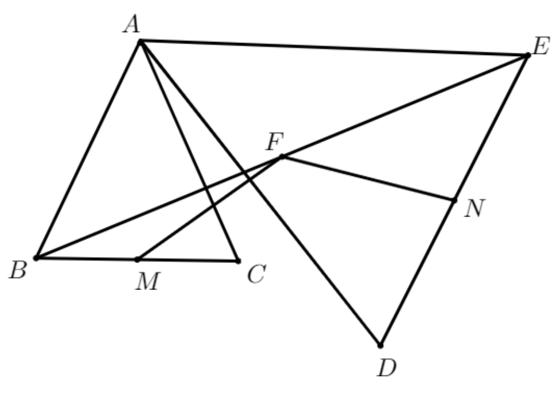
Luego, si n es mi edad, entonces

$$666(a + b + c + d) = n(a + b + c + d)^2 = abcd \cdot \frac{36}{13}.$$

De aquí se sigue que $abcd$ es múltiplo de 13, esto es, $abcd = 13k$ para algún entero positivo k. Por lo tanto, tenemos que $666(a + b + c + d) = 36k$, esto es, $37(a + b + c + d) = 2k$. De esta ecuación obtenemos que k es múltiplo de 37, es decir, $k = 37p$ para algún entero positivo p. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos que $37(a + b + c + d) = 2(37p)$ o, de manera equivalente, $a + b + c + d = 2p$. Por lo tanto, tenemos que $666(2p) = n(2p)^2$, esto es, $333 = np$, que es lo mismo que $3^2 \cdot 37 = np$. Como p es la mitad de la suma de los dígitos a, b, c, d y p está entre $6 = 0 + 1 + 2 + 3$ y $30 = 6 + 7 + 8 + 9$, concluimos que $p = 9$, $n = 37$ y $abcd = 13k = 13 \times 37 \times p = 13 \times 37 \times 9 = 3330 + 999 = 4329$. Luego, el cociente del número de mi casa entre mi edad es igual a $\frac{4329}{37} = 117$.

PARTE B

Problema 13. (Sinaloa) Sean ABC y ADE dos triángulos isósceles semejantes entre sí, donde $AB = AC$, $AD = AE$ y $\angle BAD = \angle CAE$. Llamemos M, N y F a los puntos medios de BC, DE y BE, respectivamente. Determina el valor de la razón $\frac{MF}{FN}$.



Solución. Como $\angle DAB = \angle EAC$, por el criterio LAL los triángulos DAB y EAC son congruentes. Entonces, $BD = CE$. Como M y F son puntos medios de los lados BC y BE, respectivamente, en el triángulo EBC, tenemos que $MF = \frac{1}{2}CE$. Análogamente, tenemos que $FN = \frac{1}{2}BD$. Por lo tanto,

$$\frac{MF}{FN} = \frac{\frac{1}{2}CE}{\frac{1}{2}BD} = 1.$$

Problema 14. (Comité) Determina todos los enteros a, b y c distintos de cero tales que a sea divisor de $b - c$, b sea divisor de $c - a$ y c sea divisor de $a - b$.

Solución. Consideremos dos casos.
1) Hay dos números iguales entre a, b y c. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a = b$. Como $b = a$ divide a $a - c$, se sigue que $a \mid c$. Es fácil ver que las otras dos condiciones se satisfacen. Luego, en este caso, las ternas son de la forma (a, a, c) con a divisor de c.
2) Todos los números a, b y c son distintos entre sí. Observemos que los tres enteros no pueden ser positivos, ya que por las condiciones del problema el mayor debe dividir a la diferencia de los dos menores. Si los tres enteros son negativos, multiplicando por -1 caemos al caso en que todos son positivos, lo cual no puede ser.
Si hay dos negativos y uno positivo, multiplicando por -1 tendríamos el caso de un negativo y dos positivos. Luego, basta considerar el caso de un negativo y dos positivos.
Supongamos que $a > b > 0 > c$ y sea $c = -d$ con $d > 0$. Tenemos que a divide a $b + d$ y d divide a $a - b$. Esto implica que $a \leq b + d$ y $d \leq a - b$, esto es, $a \leq b + d$ y $b + d \leq a$. Por lo tanto, $a = b + d$, esto es, $a = b - c$. Como b divide a $c - a$, tenemos que b divide a $c - (b - c) = 2c - b$, lo cual implica que b divide a $2c$. Por lo tanto, las ternas en este caso son de la forma $(b - c, b, c)$ con b divisor de $2c$.

Problema 15. (Ciudad de México) En un $2n$-ágono regular se han marcado sus vértices, sus lados, su centro y las n diagonales que pasan por el centro. Si A y B son dos vértices diametralmente opuestos del $2n-$ágono, ¿de cuántas formas se puede ir de A a B moviéndose sobre las líneas de la figura sin pasar dos veces por el mismo punto?

Solución. Hay dos caminos que no pasan por el centro. Hay dos tipos de caminos que pasan por el centro pero que no usan ni la arista de A ni la arista de B. Del primer tipo son los que quedan en cada uno de los dos arcos que van de A a B y de estos hay $2\binom{n-1}{2}$, puesto que hay dos arcos y, en cada arco, el camino queda determinado al escoger cualquier par de aristas hacia el centro. Del otro tipo de caminos son los que una arista está en uno de los arcos de A a B y la otra arista está del otro lado; de este tipo hay $2(n-1)^2$. Ahora, hay $2n - 1$ caminos que usan la arista de A y hay $2n - 2$ caminos que usan la arista de B pero no la de A. Por lo tanto, la respuesta es

$$2 + 2\binom{n-1}{2} + 2(n-1)^2 + 2n - 1 + 2n - 2 = 3\left(n^2 - n + 1\right).$$

Equipos

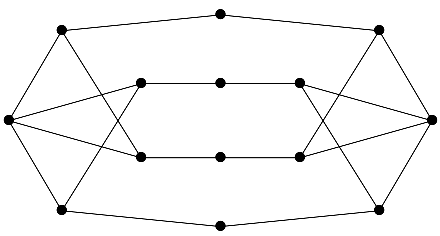
Problema 1. (San Luis Potosí) Daniela está parada en el vértice A del cuadrado $ABCD$. Va a lanzar una moneda: si cae águila, avanzará al siguiente vértice en el sentido de las manecillas del reloj; si cae sol, avanzará al vértice anterior en el sentido de las manecillas del reloj. Si Daniela lanza la moneda un total de 10 veces y tras el último lanzamiento Daniela cae en el vértice A, ¿de cuántas formas pudo haber sucedido esto?

R:512.

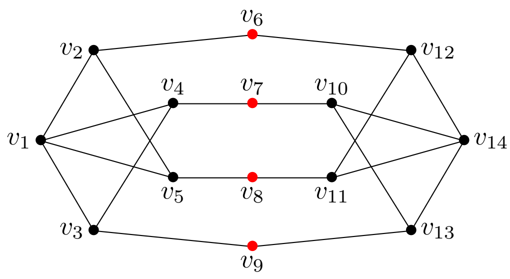
Solución. De los 2^{10} casos posibles, buscamos aquellos donde $\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1$ sea un múltiplo de 4. Como la suma máxima es 10 y cambiar un positivo por un negativo resta 2, la cantidad de signos negativos puede ser $0, 2, 4, \ldots, 10$. Las maneras de elegir su posición son

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^9 = 512.$$

Problema 2. (Michoacán) La siguiente figura consta de 14 vértices y 20 segmentos. Se dice que dos vértices son vecinos si hay una línea que empieza en uno de ellos y acaba en otro. Raúl quiere elegir algunos vértices de manera que entre los vértices que eligió y sus vecinos, estén elegidos todos los vértices. ¿Cuál es la mínima cantidad de vértices que debe elegir Raúl para lograr esto?



Solución. Primero vamos a etiquetar los vértices:



Notemos que Raúl debe elegir al menos 4 vértices de la figura ya que los vértices en rojo no son vecinos y tampoco tienen vecinos en común. Luego, eligiendo v_2, v_4, v_{11} y v_{13}, Raúl logra su cometido. Entonces debe elegir 4 vértices.

Problema 3. (Chiapas) Encuentra la suma de todos los números enteros n de tres dígitos distintos, para los cuales la suma de todos los números de dos dígitos que se pueden formar con los dígitos de n sea igual al doble de n. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces los números de dos dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos de n son 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

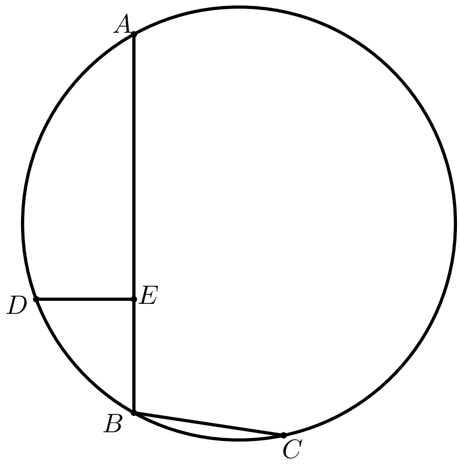
R:198.

Solución. Podemos escribir el número n como $n = 100a + 10b + c$ con $0 \leq a, b, c \leq 9$ y $a \neq 0$. Cada número formado con dos dígitos de n se puede escribir como $10x + y$ con $x \in \{a, b, c\}$, $y \in \{a, b, c\}$ y $x \neq y$. Entonces, la condición del problema es equivalente a

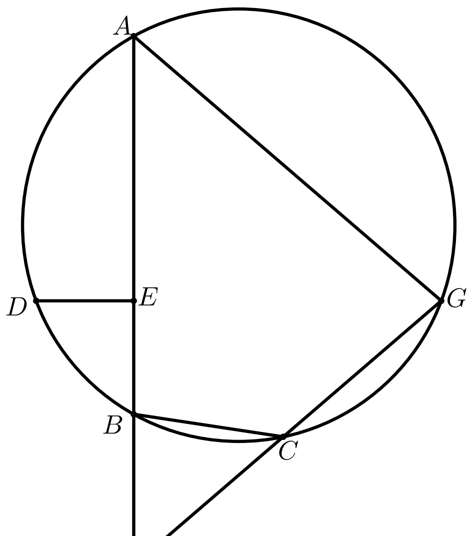
$$2n = 2(100a + 10b + c) = (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b).$$

Luego,tenemos que $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$, lo cual implica que $178a = 2b + 20c$ o bien $89a = b + 10c$. Como $89 \leq 99$, tenemos que $a \leq 1$, de donde $a = 1$ y, por lo tanto, $b = 9$ y $c = 8$. Por lo tanto, $n = 198$ es la única solución.

Problema 4. (Comité) En la siguiente figura, los puntos A, D, B y C están sobre una misma circunferencia Γ. El punto E está sobre el segmento AB de tal manera que DE es perpendicular a AB. Si $EB = 3$ cm, $BC = 4$ cm y $AD = DC$, encuentra la medida, en cm, del segmento AE.



Solución. Sea F el punto sobre el rayo AB más allá de B tal que $BF = BC$. La recta FC interseca a Γ en los puntos C y G. Como el cuadrilátero $ABCG$ es cíclico y el triángulo BCF es isósceles, se sigue que $\angle BAG = \angle BCF = \angle CFB = \angle GFA$, por lo que el triángulo AFG es isósceles con $AG = GF$.



Por otro lado, como $AD = DC$, se cumple que $\angle AGD = \angle DGC$, por lo que D está sobre la bisectriz del ángulo $\angle AGF$ y, como $AG = GF$, esta bisectriz también es la mediatriz del segmento AF, por lo que la recta GD es la mediatriz de AF. Como DE es perpendicular a AF, entonces E debe ser el punto medio del segmento AF. Por último, dado que $EB = 3$ cm y $BF = BC = 4$ cm, se sigue que $AE = EF = EB + BF = 7$ cm.

Problema 5. (Zacatecas) Emmanuel tiene un candado con una clave de 4 dígitos, pero se le olvidó la contraseña. Recuerda que todos los dígitos son diferentes, que el número es múltiplo de 45, que tiene exactamente un dígito par y que el número comienza con 9 o 4. Si k es el mínimo número de intentos que requiere para poder asegurar que sabe la clave del candado, ¿cuál es el valor de $100k$?

R:100.

Solución. Como el número de la clave es múltiplo de 45, significa que es múltiplo de 9 y de 5, y esto por sus respectivos criterios de divisibilidad nos lleva a que el número termina en 5 o 0 y que la suma de sus dígitos es múltiplo de 9. Ahora dividiremos el problema en dos casos:

1. La clave termina en 0. Esto quiere decir que ya no puede empezar con 4, pues contradiría la condición de que solo uno de los dígitos es par. Así que la clave comienza con un 9. Ahora, para que la suma de los dígitos sea múltiplo de 9, necesitamos que los dos dígitos que faltan también sumen un múltiplo de 9. Esto nos deja con que el único múltiplo de 9 que se puede sumar es 9, lo que es una contradicción, ya que al ser 9 un número impar, uno de los dígitos deberá ser par y el otro impar, pero habíamos quedado que ya no podíamos tener más dígitos pares. Concluimos que este caso no tiene solución.
2. La clave termina en 5. Este caso lo dividiremos en dos subcasos.
   (a) La clave comienza con 9. En este caso tenemos que la suma de los dígitos al momento es $9 + 5 = 14$, por lo que para que al sumarle las otras dos cifras faltantes el resultado sea múltiplo de 9 necesitamos que la suma de dichas cifras deje residuo 4 al dividirse entre 9. Así que tenemos solo las opciones de que las dos cifras faltantes sumen 4 o 13. La primera posibilidad no puede suceder, ya que como 4 es par, tenemos que sumar dos dígitos pares o dos dígitos impares, haciendo imposible cumplir que solo haya un dígito par. Concluimos que la suma de los dígitos faltantes debe ser 13. Lo que nos deja con las siguientes contraseñas posibles $\{9765, 9675\}$ (9855 no porque se repite el 5).
   (b) La clave empieza con un 4. En este caso tenemos que la suma de los números al momento es $4 + 5 = 9$, así que la suma de las cifras faltantes debe ser también un múltiplo de 9. Como estamos sumando dos dígitos distintos, la única opción posible es que sumen 9, lo que es una contradicción. Concluimos que este subcaso no tiene solución.

Por lo tanto, solo hay dos combinaciones posibles para la clave y entonces solo deberá hacer un único intento para asegurar que sabe la contraseña, ya que después de este intento, si no se abre el candado, ya solo tiene una opción posible, así que esa será la contraseña. Esto significa que $k = 1$ y, por consiguiente, $100k = 100$.

Problema 6. (Puebla) Sean a, b y c números reales que cumplen,

$$a^2 - ab = b^2 - bc = c^2 - ca = 1.$$

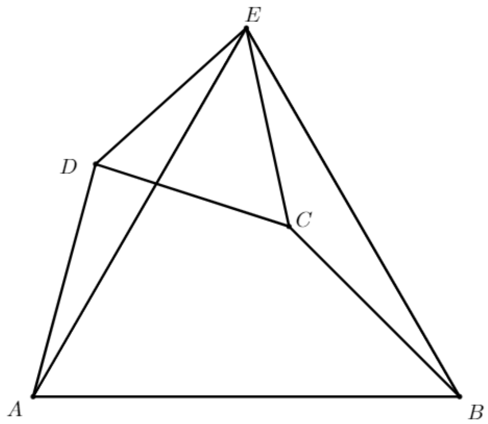
Determina el valor numérico de $abc(a + b + c)$.

Solución. Notemos que la ecuación $a^2 - ab = 1$ es equivalente a la ecuación $a^2bc - ab^2c = ab$. De las otras dos ecuaciones, obtenemos que $ab^2c - abc^2 = ca$ y $abc^2 - a^2bc = bc$. Sumando estas últimas tres ecuaciones, resulta que $ab + bc + ca = 0$. Por otro lado, se sabe que $a^2 = ab + 1$, $b^2 = bc + 1$ y $c^2 = ca + 1$. Multiplicando estas tres ecuaciones obtenemos que

$$a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2 + abc(a + b + c) + (ab + bc + ca) + 1.$$

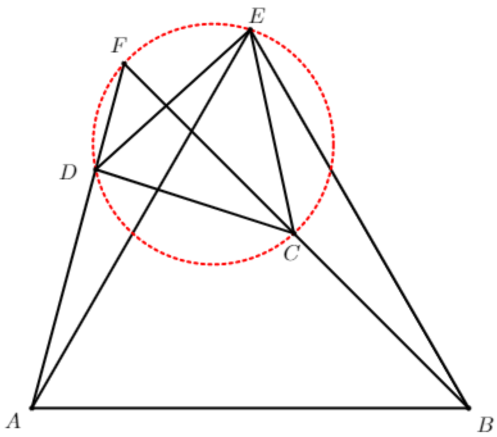
Como $ab + bc + ca = 0$, se sigue que $abc(a + b + c) = -1$.

Problema 7. (Puebla) En el cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene que $\angle BAD + \angle ABC = 120°$, $AD = BC = 5$ cm y $AB = 8$ cm. Además, se construye por fuera del cuadrilátero el triángulo equilátero CDE. Si el área del triángulo ABE es de x cm^2, encuentra el valor de x^2.
Nota: El cuadrilátero $ABCD$ es *convexo* si sus diagonales AC y BD están completamente contenidas en él.



R:768.

Solución. Sea $\alpha = \angle ADC$. Nótese que $\angle ADE = 60° + \alpha$. Como $\angle BAD + \angle ABC = 120°$, se sigue que $\angle BCD = 240° - \alpha$, por lo que $\angle BCE = 60° + \alpha$. Como $AD = BC$ y $DE = CE$, por el criterio LAL de congruencia se tiene que los triángulos ADE y BCE son congruentes, por lo que $AE = BE$, es decir, el triángulo ABE es isósceles. Más aún, la congruencia anterior implica que $\angle AED = \angle BEC$, lo que implica que $\angle AEB = \angle DEC = 60°$ y, por tanto, el triángulo ABE es un triángulo equilátero. De aquí es fácil calcular su área sabiendo que su lado mide 8 cm, esto es, $x = 16\sqrt{3}$ cm^2 y, por consiguiente, $x^2 = 768$.



Otra solución. La idea es igual a la anterior de mostrar la congruencia de ADE y BCE, solamente que damos otra manera de justificar que $\angle ADE = \angle BCE$, que por suplementarios basta ver que $\angle FDE = \angle FCE$ (donde F es la intersección de BC con AD), esto último será inmediato si mostramos que el cuadrilátero $DCEF$, es cíclico. Pero el cuadrilátero es cíclico ya que los ángulos $\angle DFC$ y $\angle DEC$ son iguales a $60°$, el primero ya que $\angle DFC = 180° - (\angle BAD + \angle ABC) = 180° - 120° = 60°$ y el segundo por ser ángulo del triángulo equilátero CDE.

Problema 8. (Comité) Demuestra que si n es un entero positivo tal que $3n+1$ y $10n+1$ son cuadrados, entonces $29n+11$ no puede ser un número primo.

Solución. Supongamos que $3n+1 = a^2$ y $10n+1 = b^2$ con a y b enteros positivos y que $29n+11 = p$ es primo. Multiplicando las primeras dos igualdades, obtenemos que $(ab)^2 = (3n+1)(10n+1) = 30n^2+13n+1$. Luego,

$$(ab)^2 - (n+1)^2 = 30n^2 + 13n + 1 - (n^2 + 2n + 1) = 29n^2 + 11n = np,$$

esto es, $np = (ab - n - 1)(ab + n + 1)$. De aquí se sigue que al menos uno de los factores en el lado derecho es divisible por p y, por consiguiente, es al menos p. Como $ab + n + 1 \geq ab - n - 1$, tenemos que $ab + n + 1 \geq p$, de donde $ab \geq 28n + 10$. Se sigue que $(ab)^2 \geq (28n + 10)^2 = 784n^2 + 560n + 100$. Por otra parte, $(ab)^2 = 30n^2 + 13n + 1$, lo que es una contradicción.
Comentario. Las hipótesis del problema se verifican, por ejemplo, para $n = 8$ y $n = 96$.