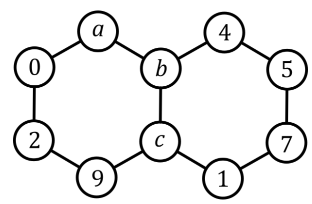
Los Exámenes.

2.1. Prueba individual. Nivel I.

1. Los diez dígitos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ se han colocado cada uno dentro de un círculo de manera que las dos sumas, de los seis números en cada hexágono, son iguales. ¿Cuál es el valor de $b + c - a$?



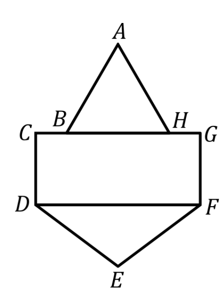
2. En la siguiente operación cada letra representa un dígito entre 0 y 9. ¿Cuánto vale la suma $o+m+m+e+b$?

$$\begin{array}{cccc} o & m & m & e \\ + & b & 3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

3. Víctor y Vicky compraron un pastel y se lo comieron de la siguiente manera: Una mañana Víctor se comió la mitad del pastel, por la noche Vicky se comió la mitad del pastel que quedaba. Este proceso siguió de la misma manera durante 4 días, comiendo cada uno la mitad del pastel que encontraban. En la mañana del quinto día, Víctor se comió lo que quedaba del pastel. ¿Qué proporción del pastel comió Víctor en los 5 días?

4. Dada la lista de números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ una *sublista* se forma tomando al menos un número de la lista y ordenados de menor a mayor, por ejemplo $1, 2, 8$ es una *sublista*. Encuentra la cantidad de *sublistas* en las que ninguno de los números $2, 3, 5$ o 7 aparecen.

5. La siguiente figura está compuesta por el triángulo equilátero ABH; el rectángulo $CDFG$ y el triángulo isósceles DEF; de manera que $AB = DE$ y $CD = 2BC = 2GH$. Si el perímetro de DEF es 8 y el perímetro de $CDFG$ es 10, ¿Cuál es el perímetro de la figura?



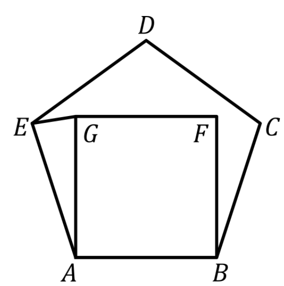
6. Los enteros positivos a, b, c, d, e cumplen con:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e+1}}}} = \frac{268}{187}.$$

Encuentra el valor de $a + b + c + d + e$.

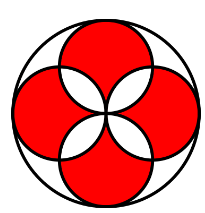
7. Al imprimir un libro, el impresor no incluyó las hojas que tienen páginas que terminan con la cifra 8. Si el total de las cifras de las páginas que no se incluyeron es 230; ¿cuál es el número máximo de páginas que puede tener el libro original?

8. En la siguiente figura, $ABCDE$ es un pentágono regular y $ABFG$ es un cuadrado. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo GED?



9. El número $100\ldots00200\ldots001$ se formó con un 1 seguido de 2017 ceros, luego un 2, seguido de otros 2017 ceros y al final un 1. ¿Cuántos ceros tiene la raíz cuadrada del número?

10. En la figura siguiente, la circunferencia mayor tiene radio 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



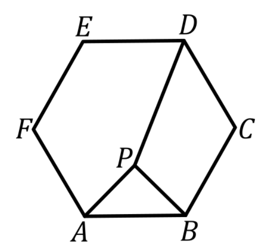
11. A Pedro y a María les dejaron de tarea recortar círculos de cartón en fracciones. María recortó cada círculo en 8 partes. Pedro las recortó en 6 partes. En total recortaron 30 círculos y María terminó con el doble de piezas que Pedro, ¿cuántos círculos recortó María?

12. Las bases de un trapecio miden 18 cm y 8 cm, y los otros dos lados, 8 cm y 6 cm. Encuentra la longitud, en centímetros, del segmento que une los puntos medios de las bases.

13. ¿Cuántos enteros de 2 dígitos existen tales que al multiplicarlos por 3 se obtiene un número de 3 dígitos, todos ellos iguales?

14. Encuentra la cantidad de enteros positivos de 5 dígitos distintos, tales que cada uno de sus tres dígitos intermedios es igual al promedio de sus dos dígitos adyacentes. Un ejemplo de estos números es 12345.

15. Sea $ABCDEF$ un hexágono regular de lado 2 cm. Sea P un punto dentro del hexágono de tal manera que $\measuredangle APB = 90°$ y que $AP = PB$. Encuentra el valor, en cm^2, de DP^2



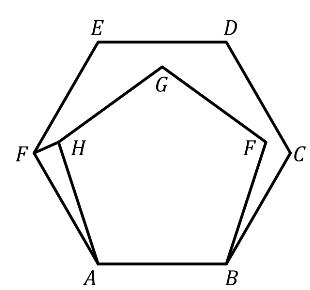
2.2. Prueba individual. Nivel II.

2.2.1. Parte A

1. Coincide con el Problema 3 de Nivel I.

2. Coincide con el Problema 4 de Nivel I.

3. En la siguiente figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular y $ABGHI$ es un pentágono regular. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo IFE?



4. Coincide con el Problema 13 de Nivel I.

5. Si se lanzan 3 dados, calcula la probabilidad de que el producto de los números que quedaron boca arriba tenga exactamente dos divisores positivos.

6. Coincide con el Problema 15 de Nivel I.

7. Al realizar la multiplicación $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2017)$, ¿Cuál es el coeficiente de x^{2016}?

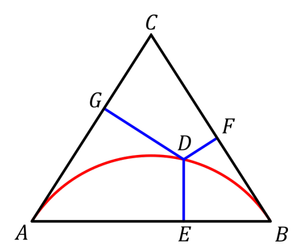
8. Coincide con el Problema 14 de Nivel I.

9. Se escriben en fila los números naturales a partir del 50, excluyendo aquellos que tienen alguna cifra 3:

$$505152545556575859606162 64\ldots$$

¿Qué cifra queda en el lugar 2017?

10. En la siguiente figura, D es un punto sobre el arco AB, los segmentos CA y CB son tangentes al arco en los puntos A y B, respectivamente, y los puntos E, F y G son los pies de las perpendiculares desde D a los lados AD, BC y CA, respectivamente. Si $DG = 9$ cm y $DF = 4$ cm, calcula, en cm, la longitud DE.



11. Encuentra el máximo común divisor de 111444444 y 444111111.

12. Encuentra todos los enteros positivos x, que cumplan la ecuación

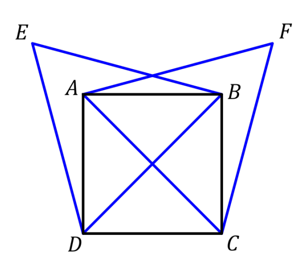
$$x^3 - 2017x - 360 = 0$$

2.2.2. Parte B

1. Encuentra la suma de todos los números positivos primos relativos con 100 y que sean menores que 100.

2. Un entero positivo se dice *balanceado* si todos sus dígitos aparecen la misma cantidad de veces. Por ejemplo, 1234, 101022 y 777 son números *balanceados*. Encuentra la cantidad de números balanceados menores a 10^4.

3. Sean $ABCD$ un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm y E, F puntos tales que ACF y BDE son triángulos equiláteros. Encuentra la razón del área del cuadrilátero $DCFE$ entre el área del cuadrilátero $ABFE$.

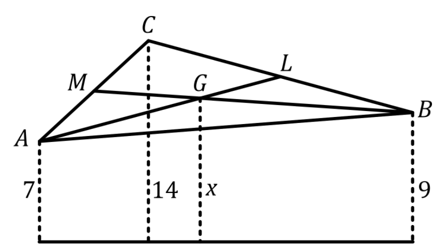


2.3. Prueba individual. Nivel III.

2.3.1. Parte A

1. El número 10! tiene 270 divisores positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar uno de ellos al azar, este divisor sea impar?

2. Las distancias desde los tres vértices A, B, C de un triángulo ABC a una recta dada miden 7 cm, 9 cm y 14 cm, respectivamente. Sean L y M los puntos medios de BC y CA, respectivamente, y sea G el punto de intersección de AL y BM. Calcula la distancia, en centímetros, desde G a dicha recta.



3. Coincide con el Problema 9 de Nivel II.

4. Coincide con el Problema 11 de Nivel II.

5. Coincide con el Problema 5 de Nivel II.

6. Coincide con el Problema 7 de Nivel II.

7. Coincide con el Problema 10 de Nivel II.

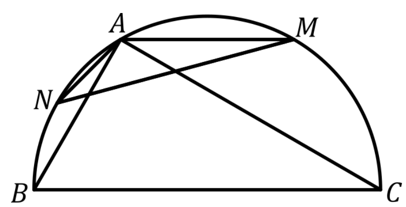
8. Coincide con el Problema 12 de Nivel II.

9. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto $1, 2, 3, \ldots, 2017$. Para cada subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ se denota por $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ a la suma de todos los elementos de $\mathcal{A}$. Calcula el promedio de todos los números $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$

10. Encuentra todos los números de tres cifras que sean cuadrados perfectos y tales que el número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras también sea un cuadrado perfecto.

11. En un autobús van seis pasajeros, cada uno lleva un boleto con número, los 6 números son distintos. Además los números de los boletos cumplen que ninguno es múltiplo de 5 y para cada número de boleto hay exactamente otro, de los cinco restantes, de manera que ese par de números no tiene divisores positivos en común, aparte del 1. ¿Cuál es el número más pequeño que se puede obtener al multiplicar los números de los seis boletos?

12. En el triángulo ABC, el segmento AB mide 1 cm, $\measuredangle BAC = 90°$ y $\measuredangle CBA = 60°$. Además M y N son los puntos medios de los arcos AC y AB, respectivamente de la semicircunferencia. Calcula, en cm^2, el valor del área del triángulo ANM.



2.3.2. Parte B

1. Coincide con el Problema 3 de Nivel II.

2. Los números enteros positivos a, b y c son distintos y satisfacen que

$$a|b + c + bc, \quad b|c + a + ca, \quad c|a + b + ab.$$

Prueba que al menos uno de los números a, b, c no es primo.

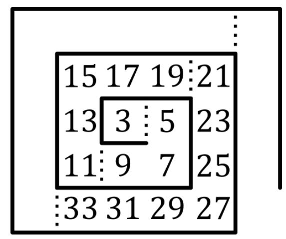
3. El número natural M tiene exactamente 6 divisores positivos cuya suma es 3500. Encuentra todos los valores posibles de M.

2.4. Prueba por equipos. Nivel I.

1. Toño fue a la tienda. Tanto Toño como el señor de la tienda tienen sólo monedas de 1, 2, 5 y 10 pesos. Toño afirmó: “Puedo pagar con 3 monedas y de cambio recibir 2 monedas de valor distinto a las que usé para pagar”. ¿Cuáles son todas las posibles cantidades que puede pagar Toño?. Toma en cuenta que Toño nunca usaría monedas de más, es decir, no usa monedas que al quitarlas, el valor de las monedas restantes siga siendo mayor o igual a la cantidad que debe pagar.

2. Una pulga salta sobre los vértices de un polígono regular de 2017 lados. Los vértices están numerados consecutivamente del 1 al 2017. La pulga inicia en el vértice 6, siempre salta 4 vértices y cae en el quinto más adelante (por ejemplo, del vértice 20 llega al 25), pero se regresa 2 vértices cuando cae en un vértice numerado con una potencia de 2 (por ejemplo, después de un posible salto $27 - 32$, regresa al 30). ¿Después de cuántos saltos la pulga supera por primera vez el 1?

3. Se colocan los números impares 3, 5, 7, 9, . . ., siguiendo una espiral como se muestra en la figura. El número 3 quedo en un primer cuadrado de 1×1, al poner el 9 se cerró un segundo cuadrado de 2×2, un tercer cuadrado se cerró al poner el 19. ¿Qué número cierra el cuadrado número 18?



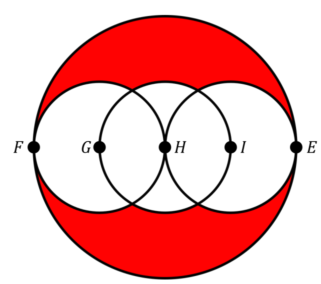
4. Los nadadores Omar, Mario, Miguel, Edgar y Beto van a competir en una carrera de 100 metros libres en una alberca de 5 carriles. Se acomodan en los carriles de forma que:

    1. Beto no nada al lado de Mario, ni de Edgar.
    2. Omar nada en un extremo.
    3. Miguel nada en medio de dos personas y ninguna de ellas es Mario.
    4. Edgar no está en los carriles 2, 3 ni 5.

    Indica en qué carril está cada uno de los competidores.

5. Determina la cantidad máxima de triángulos que tienen sus tres vértices en algunos de los puntos de intersección de 6 rectas y ninguno de sus lados está sobre alguna de las rectas.

6. El diámetro FE mide 4 cm y se divide en 4 partes iguales: $FG = GH = HI = IE$. Se trazan circunferencias con diámetros FH, GI y HE. ¿Cuánto mide el área sombreada, en cm^2?



7. Encuentre todos los números múltiplos de 3, de 4 cifras, ninguna de ellas igual a 2 o 4, tales que al dividirlos entre 3, resulte un número de 4 cifras con exactamente las mismas cifras del número original.

8. El número de la casa de Joaquín es el 932. Joaquín se da cuenta que este número cumple las siguientes condiciones:

    - Todos los dígitos son positivos y aparecen en orden decreciente ($9 > 3 > 2 > 0$).
    - La suma de 932 con el número que se obtiene invirtiendo el orden de los dígitos es un número que tiene todos sus dígitos impares ($932 + 239 = 1171$).

    ¿Cuáles números de 3 dígitos, incluyendo el 932, tienen estas dos propiedades?

2.5. Prueba por equipos. Nivel II.

1. Coincide con el Problema 3 de Nivel I.

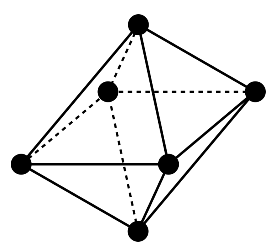
2. Coincide con el Problema 4 de Nivel I.

3. Sean $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ y$A_1A_2B_3...B_nB_{n+1}$ dos polígonos regulares con n y n+1 lados, respectivamente, tales que comparten el lado A_1A_2. Además, el polígono $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ es interno al polígono $A_1A_2B_3...B_{n-1}B_nB_{n+1}$. Encuentra todos los valores de $n > 3$ tales que

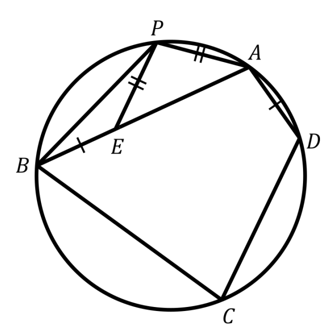
$$\measuredangle A_nB_{n+1}B_n = \frac{\measuredangle A_1B_{n+1}B_n}{3}.$$

4. Coincide con el Problema 8 de Nivel I.

5. Coloca los números del 1 al 8 en las caras del octaedro regular, de manera que se cumpla la siguiente condición: si en cada vértice del octaedro se escribe el producto de los números que están en las 4 caras que lo tocan, entonces la suma de cada pareja de números escritos en vértices opuestos es la misma.



6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con sus vértices sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ y tal que $AB > AD$. Sea E un punto sobre el lado AB tal que $BE = AD$. Sea P un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ con $AP = PE$. Muestra que $\measuredangle DCP = \measuredangle PCB$



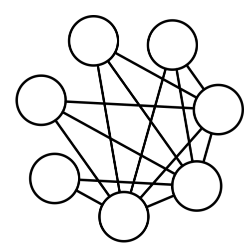
7. Para cada entero positivo n, considera los enteros positivos a y b tales que: a y b no tiene divisores positivos en común diferentes de 1, $ab = n$ y $a + b$ es mínimo (esto último quiere decir que si $n = ab = cd$, entonces $a + b \leq c + d$.) Definimos $f(n) = |s(a) - s(b)|$ donde $s(j)$ representa la suma de los dígitos de j. Calcula la suma:

$$f(1^2 + 1) + f(2^2 + 2) + \cdots + f(2017^2 + 2017).$$

8. Juan escribe un número, entre 1 y 1000 (inclusive). Él reta a su hermano Mario a adivinar qué número escribió. En cada paso, Mario puede hacer preguntas a Juan de la siguiente forma: ¿El número que escribiste es **igual**, **mayor** o **menor** a x?, donde x es cualquier número entre 1 y 1000 que Mario puede escoger en cada paso. Juan deberá responder esta pregunta con la verdad. Mario gana cuando Juan le responde que el número que escribió es **igual** al número x por el cual preguntó Mario. Encuentra una estrategia en la cual Mario tarde a lo más 9 preguntas en ganar, independientemente de qué número escriba Juan.

2.6. Prueba por equipos. Nivel III.

1. Coloca los números del 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dentro de los círculos de la siguiente figura, de manera que si dos círculos están conectados con un segmento los números en esos círculos no tienen divisores en común distintos de 1.



2. Encuentra todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) tales que

$$x^3 + 3x^2 + z^2 + 2x + 3y = 2018.$$

3. Coincide con el Problema 3 de Nivel II.

4. Coincide con el Problema 6 de Nivel II.

5. Coincide con el Problema 7 de Nivel II.

6. Sea P un punto en el plano. Se dibujan n circunferencias de radio 1 tales que P es un punto común a ellas. Encuentra el máximo n de tal manera que no suceda que el centro de alguna de las circunferencias quede en el interior o en el borde de otra de las circunferencias.

7. Para cada entero positivo n que no termine en cero, sea n^* el resultado de escribir los dígitos de n en orden inverso. Por ejemplo $2017^* = 7102$. Sea a un entero positivo de menos de 8 dígitos tal que a^* es distinto de a y denotemos por D al máximo común divisor de los números a y a^*. Se sabe que D es mayor a 2017 y lo dividen al menos tres primos distintos. Halla un valor posible de a.

8. Un entero positivo n es *bueno* si el exponente del 13 en la factorización de primos de $n!$ es distinto de cero y divisible por 13. Encuentra todos los enteros positivos n que sean *buenos* pero que ningún número menor a $n - 13$ lo sea.