factorial!

Revista de Matemáticas

f!12(2019)

Editorial Dinosaurio

Editorial Dinosaurio es un proyecto de CARMA,
Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas.

Encuentra todo el material de Editorial Dinosaurio en
editorialdinosaurio.blogspot.mx

doce factorial!

Presentación

Este número está dedicado al concurso nacional que conocemos actualmente como Olimpiada Nacional para Alumnos de Primaria y Secundaria (ONMAPS) que desde el año 2000 organiza la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM) cada año en mayo –o junio-. Haremos una re-edición de esta revista cada año para actualizarla e incluir el examen de cada nueva edición de la ONMAPS.

En esta tercera versión (2017) incluimos los enunciados de los problemas de las ediciones del 2005 al 2016 como aparecieron en números anteriores de esta revista (del 2005 al 2013 en la f!4 y la 2014 en la f!7, más las dos ediciones anteriores de este mismo). Incluimos las soluciones que hemos escrito hasta el momento, que no son todas.

Esta es la primera vez que tenemos todas las ediciones completas, desde la 1ra hasta la 17ma. Advertimos, sin embargo, las siguientes notas sobre los exámenes:

- Es posible que sobre un problema en la ONMAS 2007.
- Es posible que haya problemas mezclados entre la ONMAS 2008 y 2009.
- Es posible que sobre un problema en la ONMAPS 2010.

Cualquier información para completar y corregir el orden en que aparecen los problemas será mucho muy apreciada.

Queremos agradecer muy sentidamente a Rosemberg Toalá, a José Eduardo Sócrates y a Esteban Hernández quienes nos ayudaron a llenar huecos en la ONMAS 2001, 2003 y 2006. Además, a César Pérez Carrizales, quien nos ayudó a completar la ONMAS 2001 y 2002.

En la edición del 2018 incluiremos la ONMAPS 2018 y así sucesivamente.

Fondeadores

Agradecimiento

En junio y julio del 2015 llevamos a cabo un proyecto en la plataforma de crowdfunding Fondeadora para financiar nuestros proyectos del año, entre los que incluimos varias ediciones de nuestra revista *factorial!*. Las siguientes personas nos apoyaron y gracias a ellos podemos seguir trabajando.

- Yuridia Selene Posadas
- Diego Roque
- Marco Saúl
- Elver
- Eunice Cano
- Isaí Vázquez
- Marco Antonio
- Mónica
- Mario Salas
- Jesús Contreras
- Héctor Flores
- Francisco Acosta
- Benjamín Palau
- Maya Flores
- Florencia Alatorre
- Ricardo Vega
- José Salazar
- Saúl Zabaleta
- Mauricio Devars
- Jessi Quiñonez
- Jacinto Bardem
- Juan Marcelino
- Marco Antonio
- Ana Paula Alatorre
- Eugenio Flores Villasuso
- Ricardo Castro
- Familia Espinosa Ruiz
- Salsas Naturalmente Pícara

Estamos agradecidos de todo corazón y a ellos dedicamos este número.

Patreon

Agradecimiento

Desde finales de 2017 tenemos una cuenta en Patreon donde recibimos donativos mensuales para mantener nuestro trabajo. Las siguientes personas nos han apoyado por varios meses:

- Demian Espinosa Ruiz
- Ricardo Castro
- Esteban Fredín
- Leonardo Martínez Sandoval
- Gabriela Bueno
- Isaí Vázquez
- Eunice Cano García
- Jesús Contreras
- Francisco Salces
- Felipe Ramírez

Estamos agradecidos de todo corazón y a ellos también dedicamos este número.

Puedes volverte un Patreon de Editorial Dinosaurio y apoyar nuestros distintos proyectos en el sitio **patreon.com/ugesaurio**

doce factorial!

en este número

- 1ra ONMAS 2001, Querétaro
- 2da ONMAS 2002, Guadalajara
- 3ra ONMAS 2003, Palenque
- 4ta ONMAS 2004, Chihuahua
- 5ta ONMAS 2005, Saltillo
- 6ta ONMAS 2006, Santa Catarina
- 7ma ONMAS 2007, Apozol
- 8va ONMAS 2008, Colima
- 9na ONMAS 2009, Guadalajara
- 10ma ONMAS y 1ra ONMAP 2010, Comitán
- 11ra ONMAS y 2da ONMAP 2011, Mérida
- 12da ONMAS y 3ra ONMAP 2012, La Paz
- 13ra ONMAPS 2013, Culiacán
- 14ta ONMAPS 2014, Mazatlán
- 15ta ONMAPS 2015, Mexicali
- 16ta ONMAPS 2016, Ciudad de México
- 17ma ONMAPS 2017, Jerez
- 18va ONMAPS 2018, Gómez Palacio
- 19na ONMAPS 2019, Tepic

Comité Editorial f!12(2018)

Eugenio Flores

Agradecemos las constantes revisiones de Esteban Hernández y los Tales por Cuales
Y las aportaciones de Rosemberg Toalá y César Pérez Carrizales para completar las ediciones faltantes.

Nacional ONMAPS

Yo empecé a participar como Delegado en la ONMAS en el 2008, en Colima, y he asistido a todas las ediciones desde entonces, normalmente como Evaluador. Aunque San Luis participó en la 3ra ONMAS de Palenque en el 2003, yo ya no tenía edad para participar –la edad me hubiera alcanzado nada más para la primera.

Empiezo diciendo esto porque no estoy bien al tanto de toda la historia y digo algunas cosas que sé, me han contado o he escuchado, pero podría estar mal.

La Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, ANPM, ha organizado el concurso desde su concepción, con apoyo de sus delegaciones estatales o, en algunos casos, con delegados o profesores interesados. Existe un territorio común en muchos estados que organizan tanto la OMM como la ONMAPS, aunque no en pocos son dos equipos diferentes.

El concurso nacional de la ONMAPS se ha celebrado en el mes de mayo en prácticamente todas las ediciones –con cierta frecuencia coincidió con el puente del 1 y 5 de mayo– aunque al menos la edición 2015 y 2016 se celebraron en junio.

Las sedes de las 17 ediciones del Concurso Nacional han sido, en orden: Querétaro, Guadalajara, Palenque, Chihuahua, Saltillo, Santa Catarina, Apozol, Colima, Guadalajara, Comitán, Mérida, La Paz, Culiacán, Mazatlán, Mexicali, Ciudad de México y Jerez. Los estados de Zacatecas (2007 y 2017), Sinaloa (2013 y 2014) y Chiapas (2003 y 2010) han sido anfitriones en dos ocasiones.

Tengo entendido que la evolución del concurso ha sido como sigue:

- De la edición 2000 a la 2006 había únicamente un nivel. Es decir, era el mismo examen para todos, con 3 problemas cada día.
- La excepción es la edición 2003, en Palenque, donde hubo únicamente 4 problemas, dos cada día.
- En las ediciones 2007, 2008 y 2009 hubo dos niveles: el primero para Primero de Secundaria y el segundo para Segundo y Tercero de Secundaria. Hasta aquí, el concurso se conocía como ONMAS.
- Desde la edición del 2010 el formato fue el mismo: cuatro categorías que van desde Primaria (en teoría 5to y 6to) hasta Tercero de Secundaria, con hasta dos participantes por categoría por delegación. En este formato había 12 problemas en total, entre las cuatro categorías.
- Durante las ediciones 2010, 2011 y 2012, el concurso se llamó ONMAS y ONMAP; desde el 2013 se conoce únicamente como ONMAPS.
- Para la edición 2017 –donde me tocó colaborar en el diseño– se decidió probar con 18 problemas en total.

Bajo el formato de cuatro categorías y 12 problemas, los ejercicios que resuelven los alumnos siguen el siguiente reparto:

- Categoría 1:	1, 2, 3	7, 8, 9
- Categoría 2:	2, 3, 4	8, 9, 10
- Categoría 3:	3, 4, 5	9, 10, 11
- Categoría 4:	4, 5, 6	10, 11, 12

donde la separación corresponde a la prueba de cada día.

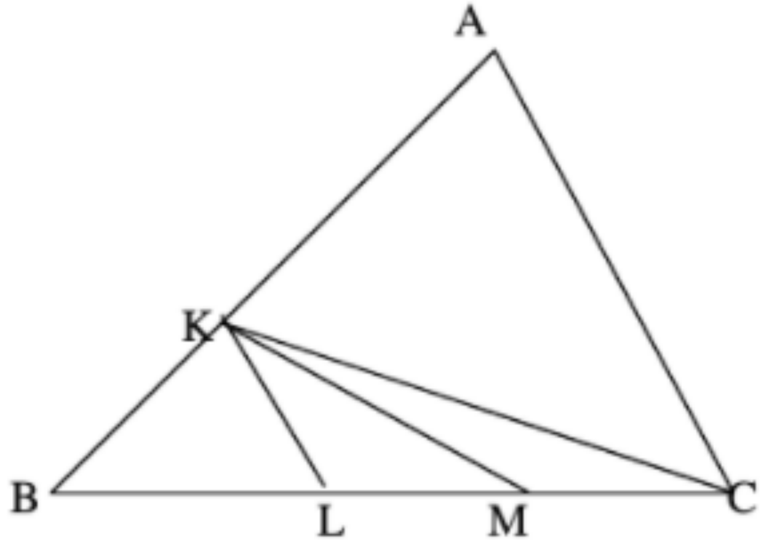
A partir de la edición 17, se mantienen las cuatro categorías pero los exámenes son más disjuntos que los años anteriores, para un total de 18 problemas:

- Categoría 1:	1, 2, 3	10, 11, 12
- Categoría 2:	3, 4, 5	12, 13, 14
- Categoría 3:	5, 6, 7	14, 15, 16
- Categoría 4:	7, 8, 9	16, 17, 18

Enunciado de los Problemas

1 ONMAS
Querétaro, 2001

Problema 1. Sobre los lados del triángulo ABC se han elegido puntos K, L, M y como se muestra en la figura, de manera que $BK = BL, KL = LM, KM = MC, KC = AK$. Calcula la medida del ángulo $\angle BAC$ si el ángulo $\angle KBM = 52°$.



Problema 2. En el conjunto A están todos los números pares entre 100 y 300 (incluyéndolos). En el conjunto B están los múltiplos de 3 menores o iguales a 300 y el conjunto R es la intersección de A y B; es decir, R es el conjunto que contiene a los números pares entre 100 y 300 que también son múltiplos de 3. ¿Cuál es el resultado de la suma de los números de A que no están en R menos la suma de los números de B que no están en R?

Problema 3. Cinco personajes: Dos brujas, una arpía y dos hadas, se reunieron alrededor de un caldero para hacer una poción de amor. Para conocer la efectividad de la poción necesitamos saber cómo se acomodaron alrededor del caldero. Para ello nos dijeron:

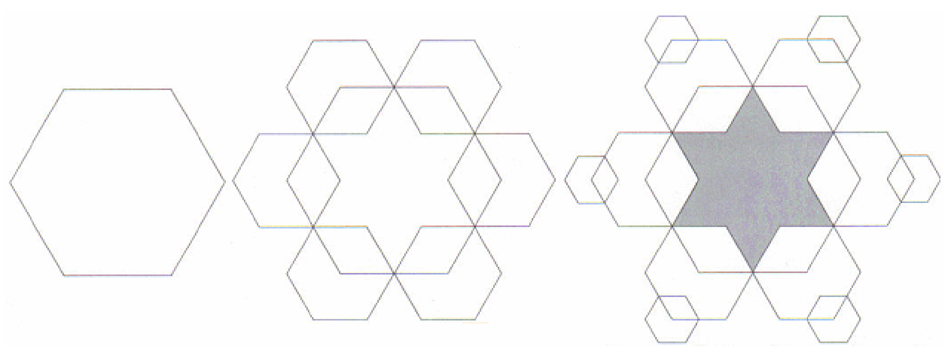
Ágata:	Cata y Eustolia estuvieron junto a mí (uno a cada lado mío)
Belina:	Eustolia estaba a mi lado y Domitila no.
Cata:	Belina estaba junto a mí y Ágata no.
Domitila:	Ágata y Belina estaban una a cada lado.
Eustolia:	Belina estaba a mi lado y Cata no.

Sabemos que las hadas siempre dicen la verdad, que las brujas siempre mienten y que la arpía dice una verdad y una mentira o una mentira y una verdad. Además sabemos que las hadas no estuvieron juntas. ¿Cómo se llaman las hadas, las brujas y la arpía?

Problema 4. Cada año, los monstruos antropoides se reúnen a jugar “gallo-gallina” en la Olimpiada Nacional de Gallo-Gallina para Monstruos Antropoides de Secundaria (ONGGMAS). El juego de “gallo-gallina” consiste en que dos monstruos se ponen en los extremos de una línea. Uno de ellos dice gallo y pone el pie sobre la línea. El otro dice gallina y pone su pie sobre la línea. Al decir gallo, el primer monstruo adelante un pie; al decir gallina, lo hace el segundo. Van haciendo esto de forma alternada dirigiéndose uno al encuentro del otro por la línea pintada, poniendo cada vez un pie pegadito al otro.

El equipo de los “Pieses” está formado por Piequepeño que calza del 66 (66 cm), Piemediano, que calza del 68 y Piegrande, que calza del 70. El equipo de los “Mostros” está formado por Yeti, Sasquatch y Abominable. Ellos tres calzan del 80. La línea pintada mide 1550 cm. Cada equipo elige un monstruo para jugar. Si inicia el juego el equipo de los “Mostros”, ¿quién debe jugar del equipo de los “Pieses” para que ellos puedan ganar? Si inicia el juego el equipo de los “Pieses”, ¿a quién deben elegir para ser ellos quienes ganen?

Problema 5. Se tiene un hexágono regular como el que se muestra en la primer figura. Usando los puntos medios de cada lado se trazan nuevos hexágonos regulares mostrados en la segunda figura. La tercera figura resulta de usar los puntos medios de los nuevos hexágonos para trazar otros hexágonos.



Si se sabe que el área de uno de los hexágonos pequeños de la última figura es 6, ¿cuál es el área de la estrella que se forma al centro?

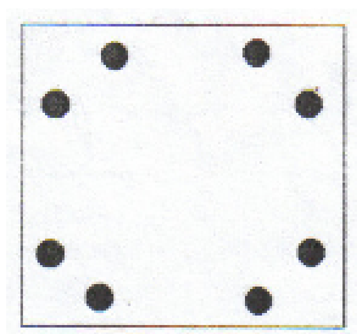
Problema 6. Se tienen 32 fichas: cuatro de ellas tienen escrito el número 1, cuatro tienen escrito el 2, cuatro tienen escrito el 3, cuatro tienen el 4 y así sucesivamente hasta el 8. Se quieren armar 16 parejas de fichas de modo que no haya parejas repetidas y la suma de los números de las dos fichas sea par. Por ejemplo, si ya formamos la pareja 1, 7 ya no podemos formar otra pareja con los mismos números pero si podemos formar la 1, 5 o la 3, 3 etc. ¿De cuántas maneras podemos agrupar las fichas en 16 parejas con las condiciones anteriores?

2 ONMAS
Guadalajara, 2002

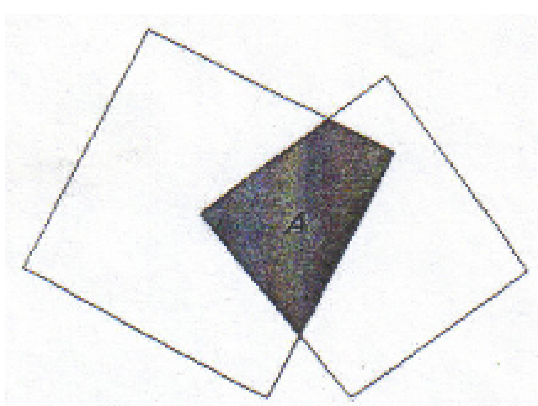
Problema 1. Sea N un número de tres dígitos distintos. Con los dígitos de N se forman todos los posibles números de dos dígitos distintos; luego se suman todos estos números de dos dígitos y el resultado es S. Hallar todos los N tales que S sea el doble de N.

Problema 2. El calendario gregoriano tiene 12 meses. ¿Cualquier otro calendario para un año común (con 365 días) constituido de meses de 28, 30 o 31 días debe tener necesariamente 12 meses?

Problema 3. Una hoja cuadrada de 20 centímetros de lado, se dobla de forma que al perforar un círculo una sola vez quede como se muestra en la figura. ¿Cuál es el máximo diámetro que puede tener el cículo de la performación?



Problema 4. Dos cuadrados se traslapan de manera que el cuadrado de lado 15 centímetros tiene uno de sus vértices en el centro del otro cuadrado y sus demás vértices fuera, si el otro cuadrado tiene 17 centímetros de lado, ¿cuál es el área de la región común A?



Problema 5. Un número es llamado *curioso* si el producto de sus cifras es un divisor de 2002. ¿Cuántos números curiosos existen que sean menores a 2002?

Problema 6. Cinco estudiantes de una clase recibieron su calificación final de Matemáticas. Los cinco pasaron el curso, es decir, obtuvieron una calificación entera mayor a 5, y cada uno obtuvo una calificación distinta a la de los otros cuatro.

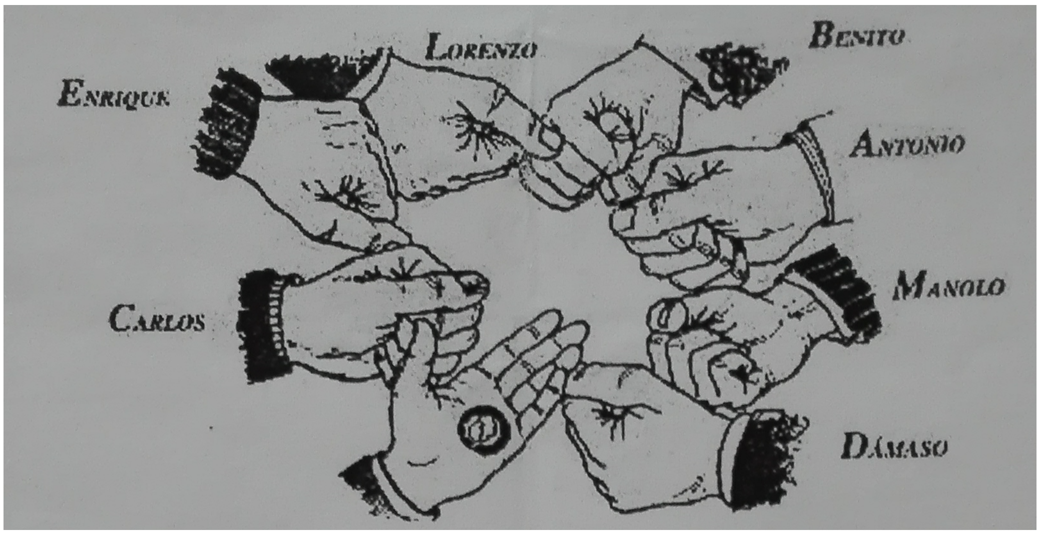
Cuando se les preguntó a ellos qué calificación obtuvieron respondieron lo siguiente:

- Pablo: Yo obtuve una calificación mayor que la de Raúl y menor que la de Enrique.
- Raúl: Me fue mejor que a Enrique y peor que a Pablo.
- Francisco: Saqué una calificación peor que la de Manuel, pero mejor que la de Raúl.
- Manuel: Yo obtuve una calificación menor que la de Pablo y mayor que la de Francisco.
- Enrique: Me fue peor en comparación con Raúl y mejor en comparación con Manuel.

Sabemos que tres de ellos dijeron la verdad y los otros dos no todo lo que diveron era verdad, y que además Pablo no obtuvo 10 de calificación. Determina qué calificación obtuvo cada estudiante.

3 ONMAS
Palenque, 2003

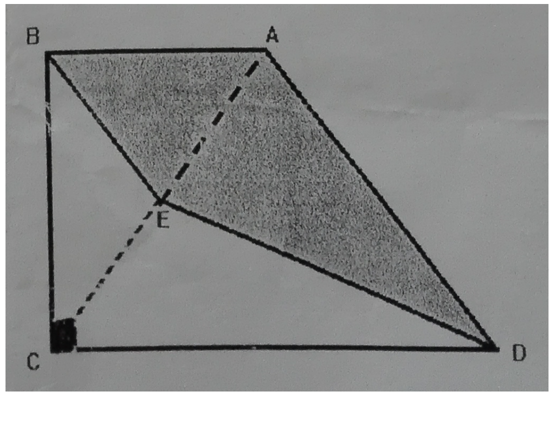
Problema 1. En una mesa hay ocho personas jugando a adivinar cuántas monedas tiene cada uno de ellos: Carlos, Enrique, Lorenzo, Benito, Antonio, Manolo, Dámaso y yo.



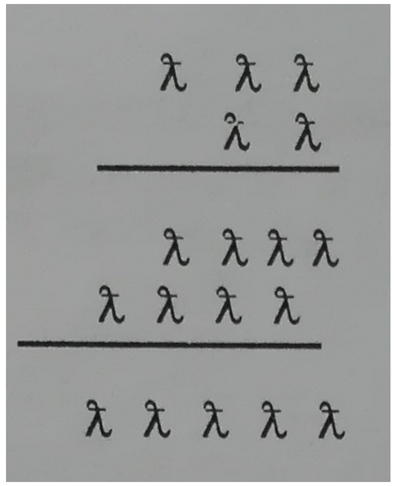
Lorenzo lleva más monedas que Benito, pero menos que Dámaso.
La suma total de monedas en juego es menor de diez.
Ningún jugador sacó dos monedas.
Sólo uno no sacó ninguna moneda.

Teniendo en cuenta que yo llevo una moneda, como muestro en la mano abierta, ¿cuántas deberé pedir para acertar el número exacto de monedas que llevan todos los jugadores, incluyendo la mía? ¿Cuántas monedas tiene cada jugador?

Problema 2. Hallar cuánto mide la superficie sombreada del trapecio, si el área total del mismo es de $80m^2$ y $AE = \frac{3}{2}EC$.



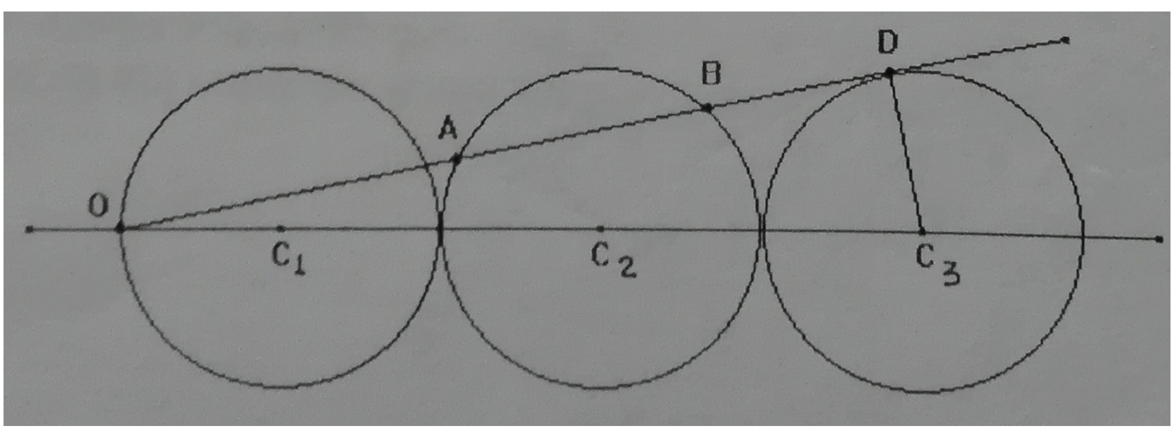
Problema 3. Los primos cuáles. En la siguiente multiplicación todas las cifras desaparecidas son números primos mayores que 1; encuentra los primos cuáles son.



Problema 4. Las tres circunferencias de la figura tienen el mismo radio, r, y sus centros caen sobre la misma recta. La circunferencia de en medio es tangente a las otras dos.

Desde el punto O se traza una tangente a la circunferencia de centro C_3.

Hallar, en función de r, el valor del segmento AB interceptado por la circunferencia central.



4 ONMAS
Chihuahua, 2004

Problema 1. En un hotel hay una alberca. La orilla de la alberca tiene ocho lados. Los ocho lados miden $10m, 20m, 30m, 40m, 50m, 60m, 70m$ y $80m$ y están armados siguiendo ese orden. Todos los ángulos de la alberca son rectos. ¿Cuál es el área de la alberca en m^2?

Problema 2. Una maquinita de un casino se acciona al depositar una moneda y jalar una palanca hace girar cuatro anillos sobre el mismo eje. El primer anillo tiene dibujados en su superficie exterior 3 animales: gato, pollo y cerdo; el segundo anillo tiene dibujados cuadritos de 4 colores: verde, amarillo, morado y rojo; el tercer anillo tiene dos números: 2 y 4; el último anillo tiene 4 palabras: cabezas, patas, rabos y ojos. Cada figura o dibujo aparece las mismas veces que las otras del mismo anillo. Al accionar la palanca comienzan a girar los anillos.

En el momento en que se detienen los anillos, se ve qué figuras o dibujos quedaron alineados frente al jugador. La única combinación ganadora es "Pollo, amarillo, 2, patas". También existe la forma de obtener la oportunidad de jugar gratis de nuevo, esto se logra haciendo una combinación que difiera exactamente en 2 anillos de la ganadora, por ejemplo "Gato, morado, 2 patas". Sabiendo que con mi mala suerte NO voy a ganar, ¿cuál es la probabilidad de ganar una oportunidad más?

Problema 3. Mi juego favorito es tomar un número y multiplicar sus dígitos, tomar ese resultado y hacerle el mismo procedimiento hasta terminar con un número de un solo dígito.

$$23 \rightarrow 2 \times 3 = 6$$
$$252 \rightarrow 2 \times 5 \times 2 = 20 \rightarrow 2 \times 0 = 0$$
$$911 \rightarrow 9 \times 1 \times 1 = 9$$

La persistencia de un número es la cantidad de pasos necesarios para llegar a un número de un solo dígito. Por ejemplo, la persistencia del 6 es 0, la persistencia del 23 es 1, la persistencia del 252 es 2 y la persistencia del 911 es 1. ¿Cuál es el menor número cuya persistencia es 4?

Problema 4. Encuentra el máximo común divisor de todos los números pares de seis dígitos que se forman usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 exactamente una vez.

Nota: El máximo común divisor de un grupo de números es el más grande de los números que los dividen a todos. Por ejemplo, el máximo común divisor de 35 y 427 es 7.

Problema 5. En un triángulo ABC, el ángulo en el vértice B es de $90°$. Se traza una línea que pasa por B y forma un ángulo de $90°$ con el lado AC; a la intersección de esta línea con el lado AC se le llama H. Se traza otra línea que divide al ángulo en el vértice A en dos ángulos iguales; esta línea corta al lado BC en P. Los segmentos AP y BH se cruzan en el punto Q de tal forma que el segmento AQ mide lo mismo que el segmento QP. Calcula el valor de $\frac{AH}{AC}$.

Problema 6. En el mundo maravilloso de la Ciencia existen siete reinos. Seis de los reyes (Arquímedes, Boyle, Copérnico, Descartes, Euler y Fermat) realizan una reunión para solucionar los problemas que éstos tienen con el rey Gauss. Uno de los reyes propone que entre los seis invadan al reino de Gauss, lo cual se somete a votación; en dicha votación hay solo tres tipos de votos: a favor de la invasión, en contra de la invasión o no votar. Después de la votación, decidieron invadir al reino de Gauss porque hubo más votos a favor que en contra.

Para saber el voto de cada uno se les preguntó a los seis reyes por tres de los votos realizados:

- ✓ Arquímedes: Copérnico votó en contra, Descartes votó a favor y Euler no votó.
- ✓ Boyle: Fermat votó en contra, Euler votó en contra y Arquímedes votó en contra.
- ✓ Copérnico: Fermat votó en contra, Boyle votó a favor y Arquímedes votó en contra.
- ✓ Descartes: Fermat sí votó, Boyle votó a favor y Copérnico votó en contra.
- ✓ Euler: Boyle votó a favor, Copérnico votó en contra y Descartes sí voto.
- ✓ Fermat: Descartes votó en contra, Euler votó en contra y Arquímedes también.

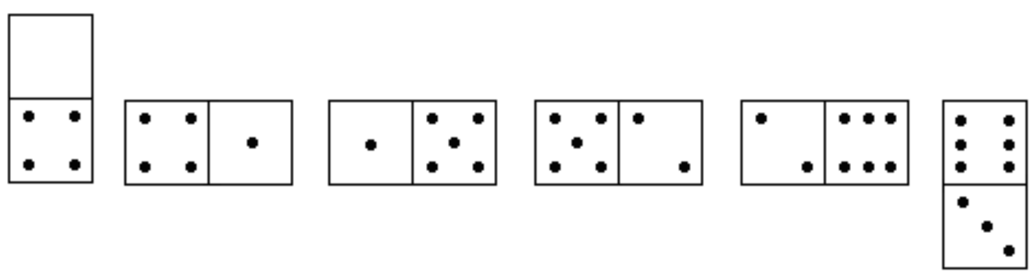
Sabemos que tres de ellos dijeron completamente la verdad y los otros tres no todo lo que dijeron fue verdad. ¿Quiénes fueron los reyes que dijeron la verdad?

5 ONMAS
Saltillo, 2005

Problema 1. AB es el diámetro de una circunferencia con centro en el punto D. C es un punto en AB tal que AC es la mitad de CB; por el punto C se traza una perpendicular a AB que corta a la circunferencia en los puntos E y F. Si el área del triángulo con vértices en A, B y E es de $60\ cm^2$, ¿cuánto vale el área del triángulo de vértices D, E y F?

Problema 2. Cuando la edición $\boldsymbol{N}$ de ONMAS se realiza en un año divisible por $\boldsymbol{N}$, diremos que es un año "*superolímpico*". Por ejemplo el año $\mathbf{2005}$ es *superolímpico* porque se realiza la edición $\mathbf{5}$ de la ONMAS y $\mathbf{2005}$ es divisible por $\mathbf{5}$ (porque 5 divide exactamente al $\mathbf{2005}$). Determina todos los años *superolímpicos*, sabiendo que la ONMAS se realiza anualmente a partir de $\mathbf{2001}$ y suponiendo que se seguirá realizando cada año.

Problema 3. Como se ve en la ilustración se han jugado seis fichas de dominó, de acuerdo a las reglas del juego, se une 4 con 4, 1 con 1, y así sucesivamente. Para el caso de la figura la suma de los puntitos de cada ficha son $\mathbf{4, 5, 6, 7, 8, 9}$ y están en progresión aritmética; es decir, los números tomados en orden tienen una diferencia común, en este caso particular es 1.

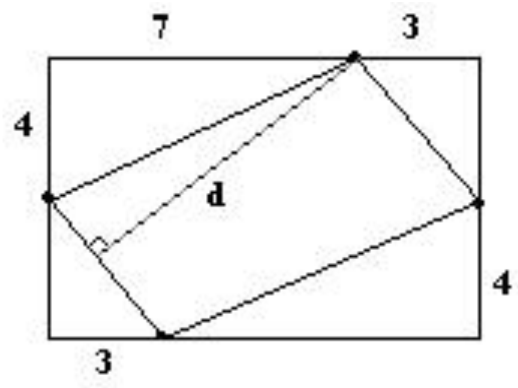


¿De cuántos modos podemos jugar seis fichas de dominó, tomadas de una caja común de veintiocho, para que los números queden en progresión aritmética?

Problema 4. El odómetro (medidor de distancias recorridas) de un carro chafa siempre brinca de 3 a 5, saltándose el 4, sin importar la posición. Por ejemplo, después de viajar un kilómetro cambió de 000039 a 000050. Si el odómetro marca 002005, ¿cuántos kilómetros ha viajado en realidad el carro?

Problema 5. Encuentra todos los números de tres cifras que sean cuadrados perfectos y que use cifras consecutivas. Por ejemplo $123, 132, 213, 231, 312, 321$ son números que usan las cifras consecutivas y 4 es un ejemplo de cuadrado perfecto.

Problema 6. En la figura, el rectángulo tiene lados de $10\ cm.$ y de $8\ cm.$ cada lado se divide como se indica en la propia figura, al unir los puntos de división se forma un paralelogramo (ojo sus ángulos no son rectos).



Calcula la distancia entre los lados paralelos más pequeños, indicada con la línea *d*.

6 ONMAS
Santa Catarina, 2006

Problema 1. Encontrar todos los números naturales n tales que sus divisores, distintos de 1 y n, cumplen que el más grande sea 7 veces el más pequeño.

Problema 2. Sea ABC un triángulo, y D, E puntos sobre AC, BC, respectivamente, tales que AB es paralelo a DE. Sea P el pie de la altura trazada desde A al segmento BC. Si $\angle ACB = 20°$ y $AB = 2DE$, encuentre el valor de $\angle PDC$.

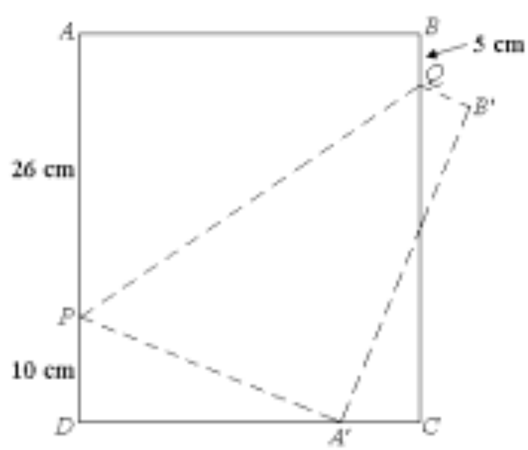
Problema 3. Para cualquier número natural n se dice que su origen se calcula multiplicando sus cifras, después las cifras del resultado, y así sucesivamente hasta llegar a un número de una sola cifra.

Por ejemplo, el origen del 149 es el 8, ya que $149 \to 36 \to 18 \to 8$; y el origen del 5486 es el 0, ya que $5486 \to 960 \to 0$.

Encuentra la suma de todos los números de dos o más cifras distintas, tales que su origen sea un número impar.

Problema 4. Una hoja de papel en forma rectangular $ABCD$ se dobla a lo largo de la línea PQ de manera que el vértice A quede en el lugar del punto A' y el vértice B en el lugar del punto B'. Al medir los segmentos $AP, BQ, DP,$ se tiene que miden $26cm, 5cm$ y $10cm$, respectivamente.

¿Cuál es el área del la hoja de papel?



Problema 5. Paz hace una lista con todos los números del 1 al 2006. Encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 6. Luego, encierra en un círculo todos los números que son múltiplos de 7. Finalmente, multiplica todos los números

que encerró. ¿Cuál es la mayor potencia de 11 que divide exactamente al resultado de esta multiplicación?

Problema 6. Se tiene cierto número de bolsas acomodadas en una fila. En ellas se meten canicas de la siguiente forma: en la primera bolsa se mete una canica, en la segunda bolsa dos, en la tercera tres y así sucesivamente. Luis escoge una bolsa que tiene catorce canicas menos que la última bolsa de la fila y observa que la suma de todas las canicas de las bolsas que están a la derecha de la que escogió es igual a la suma de las que están a la izquierda. ¿Cuántas canicas tiene la bolsa que Luis escogió?

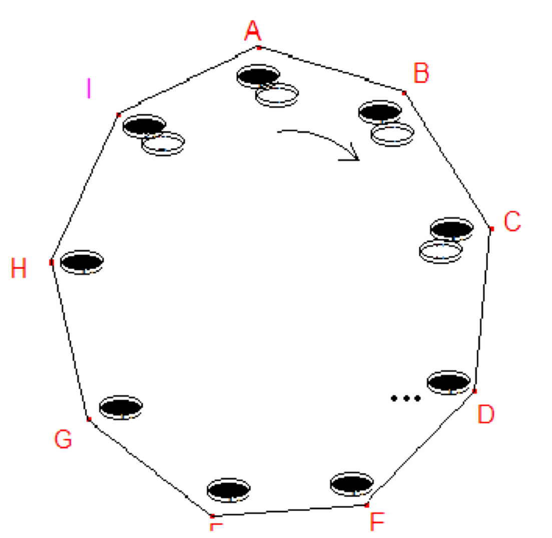
7 ONMAS
Apozol, 2007

Problema 1. Encuentra el número mayor que 2007 tal que la suma de todos sus divisores sea la mínima.

Problema 2. En un cuadrilátero *ABCD*, con ángulos interiores menores a 180º, los lados *AB, BC y CD* son iguales. También sabemos que *AD = AC = BD*. Encuentra la medida del ángulo *ABC.*

Problema 3. El abuelo repartirá 2007 monedas entre sus nueve nietos, podemos llamarlos A, B, C, D, E, F, G, H e I, de la siguiente manera: Los sienta alrededor de una mesa en el orden de sus nombres y va entregando en ese mismo orden una moneda a cada uno, empieza con A, al completar la vuelta, la siguiente vuelta comienza con el último, es decir, le entrega una más a I y continúa con A, entregando moneda por moneda, termina la siguiente vuelta con H, le entrega su moneda y con él mismo inicia la siguiente vuelta. Procede de esta manera hasta haber repartido todas las monedas.

¿Cuántas monedas le tocaron a cada nieto? ¿A cuál de los nietos le entregó la última moneda?

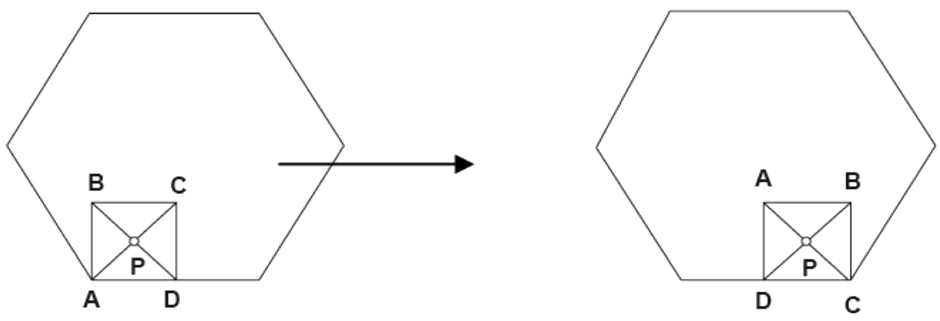


Problema 4. Encontrar el residuo de dividir el número N entre 5:

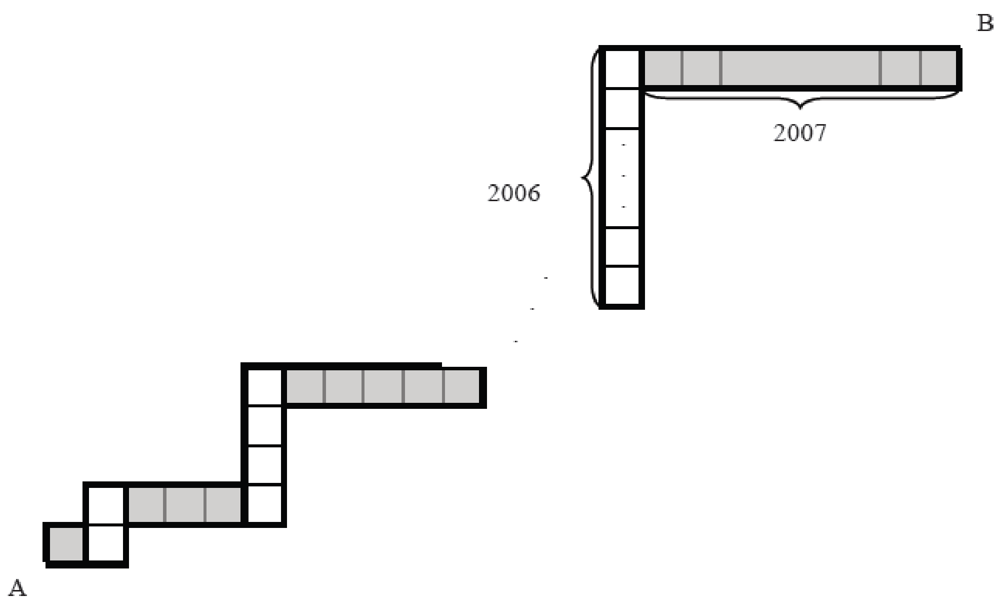
$$N = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots + 4^{2007}$$

Problema 5. En la esquina inferior izquierda de un hexágono regular de lado 4 metros se coloca un cuadrado de lado 2 metros, tal y como se observa en la parte izquierda de la figura.

El cuadrado “rueda” sin deslizarse sobre los lados del hexágono y por la parte interior de éste, girando en el sentido inverso de las agujas del reloj y manteniendo siempre un vértice apoyado en un lado del hexágono (el primer movimiento aparece en la figura). Cuando el punto P que es la intersección de las diagonales del cuadrado, vuelve a su posición inicial, ¿Cuántos metros habrá recorrido?



Problema 6. Tengo 2007 rectángulos de dimensiones $1{\times}1, 1{\times}2, 1{\times}3, \ldots, 1{\times}2007$ y los coloco en ese orden poniendo uno horizontal, luego otro vertical para formar una escalera de la siguiente forma:



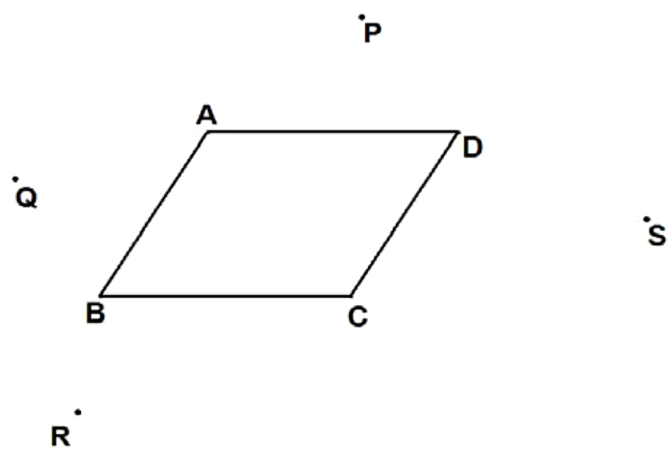
¿Cuánto mide el segmento que va desde el punto A hasta el punto B?

Problema 7. Juan tiene la lista de todos los números de 8 dígitos que se pueden formar con cuatro 1’s y cuatro 2’s. José tiene la lista de todos los números de cuatro dígitos que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 y que tenga la misma cantidad de 1’s que de 2’s. Por ejemplo: 1234, 3343, 1122, etc. ¿Quién tiene más números en su lista?

Problema 8. Se tiene una balanza de dos platillos y un número n de piezas de idéntica apariencia, de las que una tiene un peso mayor al de las demás. ¿Cuál debe ser el valor máximo de n, para encontrar la pieza de peso diferente en a lo más cuatro pesadas?

Problema 9. Los números enteros a, b satisfacen la igualdad $2007a = 7002b$. Prueba que $a + b$ no es primo.

Problema 10. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se escogen los puntos $P, Q, R,$ y S exteriores al paralelogramo. Sean M_1 y M_2 puntos medios de PA y AQ respectivamente y G_1 la intersección de QM_1 y PM_2. (G_1 es el gravicentro del triángulo PAQ), de la misma manera se localizan los puntos G_2, G_3 y G_4 en los triángulos QRB, RSC y SPD respectivamente. Demuestre que $G_1G_2G_3G_4$ es un paralelogramo.

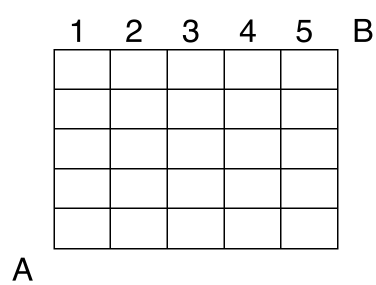


8 ONMAS
Colima, 2008

Problema 1. Se tiene un cubo con las seis caras de diferente color y deseamos colocar los números del 1 al 6 en las caras del cubo (uno en cada cara). ¿De cuántas formas podemos realizar el acomodo, si deseamos que la suma de los números que están en caras opuestas sea 7?

Problema 2. Sean G una circunferencia de centro O y G' una circunferencia que pasa por O. Sean A y B los puntos en que G interseca a G' y escojamos un punto C en G' distinto de A y B. Tracemos las líneas AC y BC y llamemos D y E a los puntos donde estas líneas cortan a G, respectivamente. Demuestra que AE es paralela a DB.

Problema 3. Juan tiene que llevar una ficha desde la esquina A hasta la esquina B, moviéndola por las líneas de la cuadrícula del tablero. La ficha puede moverse hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda (la ficha puede pasar varias veces por el mismo punto). Cada vez que la ficha se mueve en sentido horizontal, Juan anota el número de la columna por la que atraviesa. Cuando la ficha finalmente llega a la esquina B, Juan multiplica todos los números que anotó. Encuentra todos los caminos donde el producto de los números anotados por Juan es 8640. Justifica tu respuesta.



Problema 4. Francisco olvidó la clave de su tarjeta de banco y quiere realizar un retiro. Apenas recuerda que su clave contiene 4 dígitos y cumplen lo siguiente

ninguno de los dígitos es 0 ni es mayor que 5
no hay dígitos repetidos
no hay dos dígitos adyacentes que sean números consecutivos
la clave es un múltiplo de 4

Por ejemplo, el código 5413 no cumple porque el 4 y el 5 son cifras consecutivas, y el código 1135 no cumple porque se repite el 1. Francisco, que tiene muy mala suerte, probó todos los casos posibles y funcionó hasta que probó la última posibilidad. ¿Cuántos casos probó Francisco?

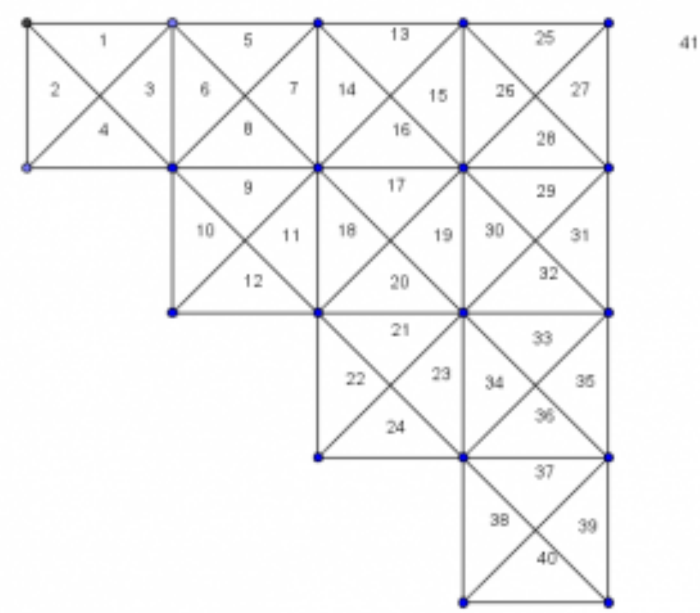
Problema 5. Hay que escribir una fila de 20 dígitos de manera que la suma de tres dígitos consecutivos de la fila sea siempre múltiplo de 5. ¿Cuál es la máxima cantidad de dígitos distintos que puede haber en la fila?

Problema 6. En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.

Problema 7. ¿Cuántos divisores cuadrados perfectos tiene el número 2008^{2008} ?

Problema 8. Encuentra todos los enteros positivos n menores que 1008 tales que el número $2^{2008} + 2^n + 1$ es un cuadrado perfecto.

Problema 9. Observa el siguiente arreglo:



¿Cuál es la suma del primero y último términos de la columna 2008? (Por ejemplo, el primero y último términos de la columna 3 son 13 y 24, su suma $13 + 24 = 37$.)

Problema 10. Se tienen 100kg de dulces en paquetes, se sabe que todos pesan menos de 10kg, si se piensan empacar en cajas de cartón que sólo resisten, sin romperse, hasta 30kg ¿cuántas cajas son necesarias para garantizar que se transporten todos los paquetes de dulces?

9 ONMAS
Guadalajara, 2009

Problema 1. En el Messenger (MSN), para que dos personas estén en contacto, es suficiente con que una de ellas envíe una invitación a la otra y ésta la acepte. Luis tiene 114 amigos de la ONMAS 2009, y ninguno de ellos se tiene agregado al Messenger entre sí. Luis les propone a ellos la idea de ponerse en contacto. ¿Cuál es el número mínimo de invitaciones aceptadas para que Luis y todos sus amigos estén en contacto por el MSN?

Problema 2. En el rectángulo $ABCD$, los puntos P, Q, R, S, uno en cada lado, dividen el lado donde están en razón $3:2$. ¿Cuál es el cociente del área del paralelogramo $PQRS$ entre el área de la región del rectángulo que queda afuera del paralelogramo?

Problema 3. ¿Cuántas ternas de dígitos (x, y, z) es posible formar, de modo que la suma $x^2 + y^2 + z^2$ sea un múltiplo de 5? (Nota: las ternas $(0,1,3), (1,0,3)$ son diferentes.)

Problema 4. La avenida principal de *Salsipuedes*, con circulación de izquierda a derecha, tiene instalados 20 semáforos, colocados cada uno a 100 metros de distancia. Los semáforos están programados para que trabajen de la siguiente manera: en cada momento hay 5 semáforos consecutivos con luz verde, y cada 10 segundos el primer semáforo prendido en verde, contando de izquierda a derecha, cambia a rojo y el semáforo rojo que está adelante del 5º semáforo en verde, cambia de rojo a verde. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el cuál se cruza al vigésimo semáforo, empezando el recorrido en el primer semáforo? ¿A qué velocidad constante se debe transitar para lograrlo en el tiempo mínimo?

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que la circunferencia S de diámetro BC pasa por el punto medio M de AB. Sea N un punto sobre S de manera que MN es diámetro de S. Probar que el área del triángulo ABC entre el área del triángulo MNC es 2.

Problema 6. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres números diferentes del conjunto $C = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ de manera que la suma de esos tres números sea múltiplo de 3?

Problema 7. En un tablero de 2009×2009 cuadritos, se han llenado todos los cuadritos usando solamente 1 ó -1, y se ha obtenido el producto de los números de cada fila y de cada columna. Encontrar todas las posibles sumas de estos 4018 productos.

Ejemplo: en un tablero de 3×3 un posible llenado es:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

y la suma de los 6 productos $1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 2$.

Problema 8. Encontrar todos los números de tres dígitos de la forma abc (a es el dígito de las centenas, b es el dígito de las decenas y c es el dígito de las unidades) que cumplan con: $abc = a! + b! + c!$ (Nota: $n!$ es el producto $n(n-1)\ldots(2)(1)$ y se lee n *factorial.*)

Problema 9. Considere las circunferencias a y b de centros A y B respectivamente. Desde el centro A se trazan las tangentes a b y éstas cortan a A en los puntos P y Q; y desde el centro B se trazan las tangentes a a que cortan a B en R y S. Demostrar que $PQRS$ es un rectángulo.

Problema 10. Sean ABC un triángulo rectángulo y M el punto medio de la hipotenusa BC. Sus catetos cumplen que CA es menor que AB. Se coloca un punto D sobre AB de manera que $CA = AD$. Finalmente, sea E el punto común de AM y CD. Si F es un punto sobre BC tal que EF es paralela a BC, demostrar que AM es perpendicular a FD.

10 ONMAPS y 1 ONMAP
Comitán, 2010

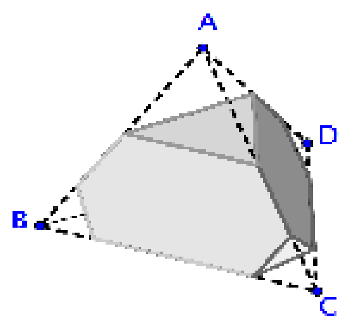
Problema 1. Coloca los números del 1 al 8 en los vértices de un cubo de manera que la suma de los 4 números que se encuentren en cada cara sea el mismo.

Problema 2. Con tres dígitos diferentes y ninguno de ellos igual a cero, se pueden formar 6 números de tres cifras, por ejemplo, con los dígitos 2, 4 y 5 se forman 245, 254, 425, 452, 524, 542. Encuentra tres dígitos a, b, c que sean diferentes y ninguno igual a cero de manera que la suma de los 6 números que se forman con ellos cumpla

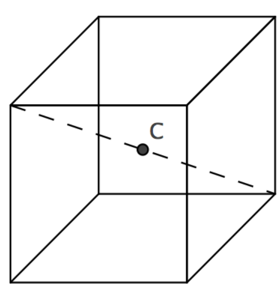
$$abc + acb + bac + bca + cab + cba = 1332$$

Problema 3. Sea $ABCD$ un tetraedro regular con aristas de longitud 10. En cada uno de los cuatro vértices del tetraedro A, B, C, D se han recortado tetraedros regulares pequeños, no necesariamente del mismo tamaño. La figura que queda tiene 8 caras y 18 aristas. Encuentra la suma de las longitudes de las 18 aristas.

Nota. Un tetraedro regular es un sólido formado con cuatro triángulos equiláteros.



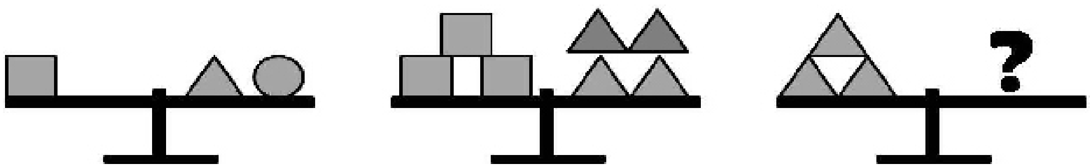
Problema 4. Un cubo de lado 3 se divide en 27 cubitos unitarios. ¿De cuántas formas podemos elegir tres cubitos de manera que sus centros estén en una misma recta? Nota: El centro de un cubito se localiza en el punto medio de una diagonal mayor. El dibujo muestra una diagonal mayor y el centro del cubito.



Problema 5. Mauricio ya cumplió años en el 2010. Al sumar los dígitos del año de la fecha de su nacimiento se dio cuenta que obtenía su edad. ¿Cuántos años puede tener Mauricio?

Problema 6. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sean D el pie de la altura desde B, E el punto medio de CD y F un punto sobre la recta por A y B de manera que $BA = AF$. Muestra que las rectas BE y FD son perpendiculares.

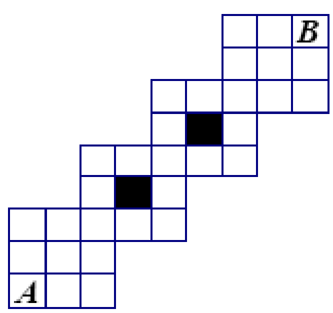
Problema 7. Tenemos cuadrados, triángulos y círculos. Las figuras similares pesan lo mismo, pero las figuras diferentes tienen distintos pesos. Si las dos primeras balanzas están en equilibrio, encuentra un arreglo de figuras que al colocarse en el lado derecho de la última balanza la deje en equilibrio, y que no sea el arreglo de 3 triángulos.



Problema 8. Sea ABC un triángulo equilátero y D un punto sobre la recta por A y B de manera que $AB = BD$ y con B entre A y D. Sea E el punto de intersección de la circunferencia de centro D y radio AB con la prolongación del segmento CD. ¿Cuál es la medida del ángulo ABE?

Problema 9. Un alfabeto usa solamente las letras A, B, C. ¿Cuántas palabras de exactamente 6 letras se pueden formar, que tengan un número par de letras A?

Problema 10. ¿Cuántos caminos hay en la siguiente figura que van del cuadrito A al cuadrito B si solamente se puede avanzar de un cuadrito a otro que esté a la derecha o arriba de él y no se permite pasar por los cuadritos sombreados?

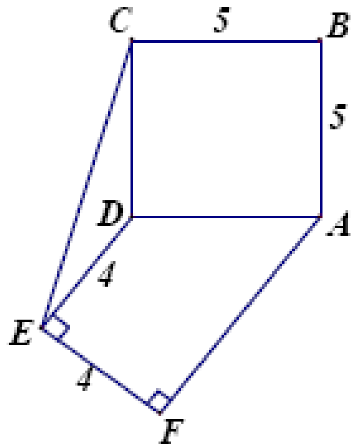


Problema 11. Si a, b son enteros distintos entre sí y distintos de cero que cumplen

$$\frac{a-2010}{b} + \frac{b+2010}{a} = 2$$

¿cuál es el valor de $a - b$?

Problema 12. En la figura de abajo, $ABCD$ es un cuadrado de lado 5. Los segmentos DE, FA son paralelos y ambos perpendiculares a EF, además DE y EF son de longitud 4. Encuentra el área del pentágono $ABCEF$.

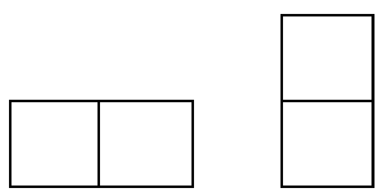


Problema 13. Una cuadrícula de 6×6 cuadritos se va a recortar en rectángulos, los cortes se harán siguiendo las líneas de la cuadrícula.

(i) Da un ejemplo donde la cuadrícula se pueda dividir en 8 rectángulos diferentes.

(ii) Muestra que no es posible hacer una división de la cuadrícula en 9 rectángulos diferentes.

Dos de los rectángulos que recortas son iguales si uno se obtiene del otro al girarlo $90°$. Por ejemplo, los dos rectángulos siguientes son iguales.



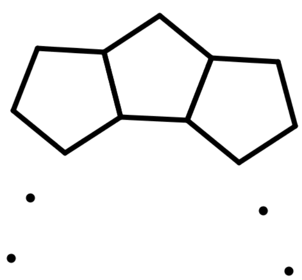
11 ONMAS y 2 ONMAP
Mérida, 2011

Problema 1. La profesora de matemáticas le asigna a Laura la siguiente tarea:

a) Escribir una lista de números comenzando con 1, 1, 2, 3.
b) Cada uno de los números siguientes que se agreguen, debe ser la suma de los cuatro números anteriores.

Si los primeros números son 1, 1, 2, 3, 7, 13, 25,.., y en total Laura escribe 2011 números, ¿cuántos de ellos son pares?

Problema 2. Para formar un polígono, se colocan pentágonos regulares iguales como se muestra en la figura. ¿Cuántos pentágonos más se necesitan para completar el polígono?



Problema 3. Hay tres equipos cada uno de ellos con tres personas. Se quieren sentar alrededor de una mesa redonda con sillas numeradas del 1 al 9. ¿De cuántas formas se pueden sentar las 9 personas en las sillas, de tal manera que cualesquiera dos personas consecutivas del mismo equipo estén separadas entre sí por la misma cantidad de sillas?

Problema 4. En una escuela se tienen 2011 grupos, cada uno con 2011 alumnos. Cada grupo tiene una caja en donde los alumnos en orden consecutivo colocan pelotas siguiendo una progresión aritmética como se muestra en la tabla:

	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	...
Grupo 1	1	2	3	4	...
Grupo 2	2	4	6	8	...

Grupo 3	3	6	9	12	. . .
Grupo 4	4	8	12	16	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Encuentra los grupos que en algún momento logran acumular exactamente 1265 pelotas dentro de su caja.

Problema 5. Seis enteros positivos y diferentes se escriben sobre las caras de un cubo (un número en cada cara). En cada vértice del cubo se escribe el número que resulta de multiplicar los números de las 3 caras adyacentes al vértice. La suma de estos 8 números es igual a 385.

a) ¿Cuál es la suma de los 6 números de las caras?
b) Determina todos los valores posibles para los números de las caras.

Problema 6. Sean *C* una circunferencia y O un punto sobre *C.* Otra circunferencia *C'* con centro en O corta a *C* en los puntos B y C. Sea A un punto sobre la circunferencia *C* y sean C' y B' los puntos de intersección de *C'* con los rayos AB y AC, respectivamente.

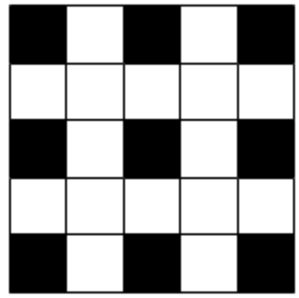
a) Muestra que los triángulos ABC y AB'C' son semejantes
b) Muestra que los triángulos ABC y AB'C' son congruentes

Problema 7. Considera un rectángulo ABCD. Un punto E está ubicado sobre el lado BC del rectángulo de tal manera que el área del triángulo ABE es la quinta parte del área del cuadrilátero AECD. Determina el valor de la razón $\frac{BC}{BE}$.

Problema 8. Un número *yuca* es un entero positivo que al multiplicarlo por 104 se obtiene un número múltiplo de 39 que termina en 6.

Encuentra los tres números *yucas* más pequeños.

Problema 9. En cada casilla de una cuadrícula de 5 x 5 se va a colocar un número del 1 al 5 de tal manera que en cada fila, columna y diagonal se colocan los cinco números.



Encuentra la mayor suma posible de los números colocados en las casillas sombreadas.

Problema 10. Sea ABCDEF un hexágono con todos sus lados de longitud 1 y con los ángulos ABC y EFA de 90°. ¿Cuánto debe medir el ángulo BCD de manera que el área del hexágono sea la mayor posible?

Problema 11. Un entero positivo n es *aluxe* si el producto de los dígitos de n es igual al producto de los dígitos de $n+1$.

¿Cuántos enteros *aluxes* n hay con $1 \leq n \leq 2011$?

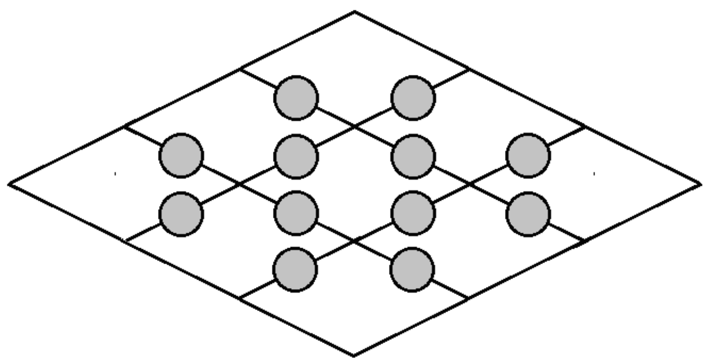
Problema 12. Determina todos los enteros no negativos a y b, que satisfacen la ecuación:

$$(ab-7)^2 = a^2 + b^2.$$

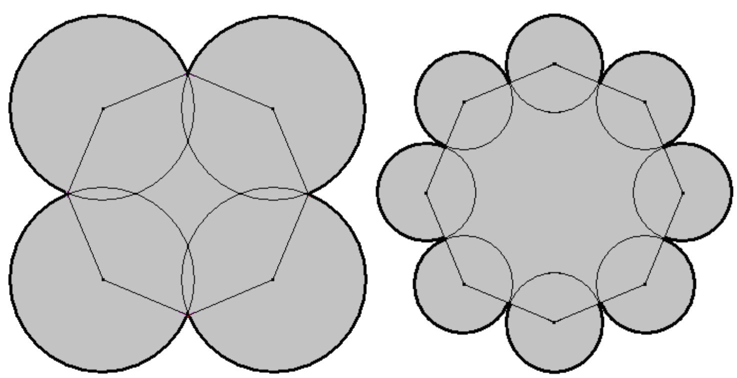
12 ONMAS y 3 ONMAP
La Paz, 2012

Problema 1. En cada rombo de la figura se coloca un número diferente del 1 al 9. Enseguida, dentro de los círculos se escribe la suma de los dos números que comparten ese lado. Finalmente, se suman los números escritos en los círculos.

De todas las sumas finales posibles, ¿cuál es la diferencia entre la mayor y la menor?



Problema 2. A partir de un octágono regular de lado 10 cm, Anita dibuja dos flores como se muestran a continuación:



¿Cuál es la diferencia entre las áreas de las flores?

Problema 3. Se dice que un número es *Paceño* si al escribir sus dígitos en orden inverso se obtiene un número mayor que él. Por ejemplo, el 3426 es *Paceño* porque 6243 es mayor que 3426, mientras que el 774 no es *Paceño* porque 477 no es mayor que 774.

¿Cuántos números de cinco dígitos son *Paceños*?

Problema 4. Encuentra el mayor número *N* que cumpla, al mismo tiempo, las siguientes condiciones:

a) Todos los dígitos de *N* son distintos.
b) *N* es múltiplo de cada uno de sus dígitos.

Problema 5. En un rectángulo *ABCD*, *F* es el punto medio del lado *CD* y *E* es un punto del lado *BC* tal que *AF* es bisectriz del ángulo *EAD*.

Si el ángulo *AEF* mide 68º, ¿cuál es la medida del ángulo *BAE*?

Problema 6. En la Bahía de la Paz, Hernán Cortés guardó su tesoro en 2012 cofres con sus respectivos candados. Cada candado y su llave están numerados del 1 al 2012. Cortés metió al azar una llave en cada cofre y cerró los candados para que nadie tomara el tesoro.

Mucho tiempo después, se halló el tesoro de Cortés. Los arqueólogos van a forzar los candados marcados con los números 1 y 2 para obtener así dos de las llaves con la esperanza de que con ellas sea posible abrir sucesivamente todos los demás cofres.

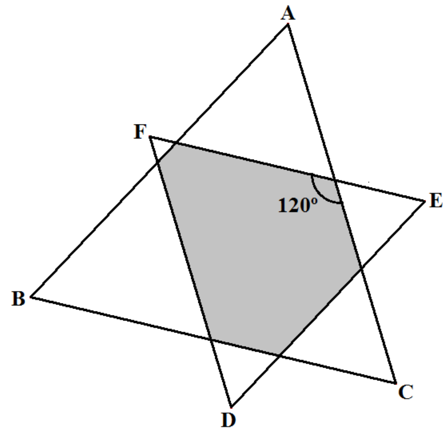
¿De cuántas maneras pudieron quedar distribuidas inicialmente las llaves dentro de los cofres de manera que la estrategia de los arqueólogos sea exitosa?

Problema 7. Diana hace una lista de 2012 números iniciando con el 2012. Cada número de la lista, lo obtiene al sustituir el dígito de las decenas del número anterior por el triple de ese dígito. Por ejemplo, si el número 4527 estuviera en la lista, entonces continuaría así: 4567, 45187, 451247, . . .

¿Cuál es la suma de los dígitos del último número de la lista de Diana?

Problema 8. Rosy efectúa la multiplicación: $1\times2\times3\times\ldots\times2012$, luego divide al producto entre 14 y continúa dividiendo cada uno de los cocientes obtenidos entre 14. ¿Cuál es el mínimo número de divisiones que tendrá que hacer Rosy para que el cociente de la división ya no sea un número entero?

Problema 9. Dos triángulos equiláteros ABC y DEF de perímetros 36 cm y 27 cm respectivamente, están sobrepuestos, formando un ángulo de 120° como se muestra en la figura.



Calcula el perímetro del hexágono sombreado.

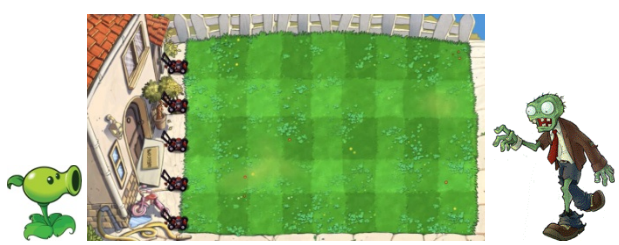
Problema 10. Luis tiene un tablero cuadriculado con la misma cantidad de filas que de columnas. Las casillas del contorno del tablero están coloreadas de gris. También tiene suficientes fichas numeradas (1, 2, 3, …) que coloca en las casillas grises de la siguiente manera:

La ficha 1 la pone en la casilla superior izquierda y a partir de ahí, el resto las coloca una en cada casilla, consecutivamente de menor a mayor en sentido de las manecillas del reloj. Una vez que llega a la posición inicial sigue colocando fichas sobre las que ya están puestas.

Luis deja de poner fichas cuando observa que los números que están a la vista en las casillas de las esquinas del tablero suman 2012.

¿Cuáles son estos cuatro números? Determina todas las posibilidades.

Problema 11. En la versión 20.12 del juego *Plantas vs Zombies*, el campo de batalla es un jardín que se divide en 45 casillas, como se muestra en el dibujo. En esta versión del juego debes colocar en cada casilla una *Planta* o un *Zombie* y ganas si neutralizas el jardín, para ello debe haber en cualquier cuadro de 2 x 2 casillas dos *Plantas* y dos *Zombies*.



Halla el número de acomodos posibles que te permita ganar el juego.

Problema 12. Sean W_1 y W_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2 respectivamente, que se intersectan en los puntos A y B. El punto C está sobre W_1 y es diametralmente opuesto a B. Las rectas CB y CA cortan de nuevo a W_2 en los puntos P y Q respectivamente, donde el punto B está entre C y P, y el punto A entre C y Q. Las rectas O_1A y PQ se intersectan en el punto R.

Si la medida del ángulo PBQ es el triple que la del ángulo PCQ, demuestra que $AO_1 = AR$.

13 ONMAPS
Culiacán, 2014

Problema 1. El año pasado, Adán y su abuela tenían (cada uno) más de 9 y menos de 100 años, sus edades eran números primos. Además, al invertir los dígitos de la edad de alguno de ellos, obtenían la edad del otro.

Este año, la edad de la abuela es múltiplo de la edad de Adán, ¿cuántos años tenía la abuela cuando Adán nació?

Problema 2. Se tiene un pentágono regular de lado 2. En tres de sus lados se trazan tres triángulos equiláteros hacia el interior del pentágono como se muestra en la figura. Al traslaparse los tres triángulos se forma un hexágono irregular. Determina la medida de cada uno de sus ángulos interiores.

Problema 3. Deeds escribe en una hoja de su cuaderno todos los números de cuatro cifras de una manera muy curiosa:

- Cada uno de estos números los escribe usando dos colores.
- El número formado por las cifras de los millares y las centenas se escribe en rojo.
- El número formado por las cifras de las decenas y unidades en azul.

Por ejemplo, en el número 7834, el número 78 se pinta de rojo y el 34 de azul. Encuentra todos los números de la lista de Deeds que cumplen las siguientes dos propiedades:

1. La cifra de las decenas es distinta de cero.
2. El número azul es un múltiplo del número rojo.

Problema 4. Una pareja de enteros positivos a y b se llama *sinaloense* si cumple, simultáneamente, que $20a + 13b = 2013$ y $a + b$ es un múltiplo de 13. Encuentra todas las parejas de números *sinaloenses*.

Problema 5. En Culiacán tienen un juego de billar con mesas que tienen forma de triángulo equilátero, cuyo lado mide 2 metros. El campeón de este juego es capaz de realizar un tiro de manera que la bola empieza en un vértice y, después de rebotar exactamente una vez en cada uno de los lados de la mesa, termina en otro vértice. Los rebotes en los lados de la mesa son tales que el ángulo de entrada es igual al ángulo de salida. Calcula la distancia que recorre la bola de billar al realizar ese trayecto.

Problema 6. Un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se dice *cuadrilibre* si la suma de los elementos de cualquier subconjunto de él no es un cuadrado. Por ejemplo, el subconjunto $\{1, 3, 8\}$ no es *cuadrilibre* ya que tanto $\{1\}$ como $\{1, 8\}$ son subconjuntos de él y además, $1 = 1^2$ y $1 + 8 = 3^2$.

¿Cuál es el tamaño más grande que puede tener un subconjunto *cuadrilibre*?

Problema 7. Diana, Gaby y Cruz jugaron un torneo de ping pong. En cada partido la perdedora se salía y entraba la otra para jugar el siguiente partido con la ganadora y así sucesivamente.

Al final Diana ganó 8 partidos, Cruz ganó 13 y Gaby sólo ganó el segundo partido del torneo. ¿Cuántos partidos perdió Gaby?

Problema 8. Una tabla formada por 6 columnas y 2013 renglones se llena siguiendo la secuencia mostrada, comenzando con el 44:

44	53	62	71	80	89
98	107				
.					
.					
.					

Obtén la descomposición en primos de la suma de los términos del vigésimo renglón.

Problema 9. Sea $ABCD$ un rectángulo tal que el $\measuredangle BDA = 30°$. Sean M el punto medio de la diagonal BD, E la intersección de la perpendicular a BD por M con la prolongación de BA, y F la intersección de la perpendicular a BD por M con AD.

Verifica que el área del ΔEAF es igual al área del ΔFMD.

Problema 10. Un número *lobola* es un número formado por diez dígitos diferentes que cumple las siguientes características:

a) $abcdefghij$ son sus dígitos.
b) abc es divisor de 2013.
c) cde y ef son múltiplos de 13.

¿Cuántos números *lobolas* diferentes se pueden formar?

Problema 11. Un número de tres cifras abc se llama *culichi* si cumple al mismo tiempo las siguientes condiciones:

- Al elevar al cuadrado el número abc se obtiene el número de cinco cifras $defgh$.
- Al elevar al cuadrado el número cba (que también es de tres cifras) se obtiene el número de cinco cifras $hgfed$.

Encuentra todos los números *culichis*.

Problema 12. Sea ABC un triángulo tal que $\angle B = 100°$ y $\angle C = 62°$. Sobre los lados AB y AC se toman los puntos M y N respectivamente tales que $\angle MCB = 52°$ y $\angle NBC = 80°$. Obtén la medida del $\angle CMN$.

14 ONMAPS
Mazatlán, 2014

Problema 1. Se forman tres números enteros de tres cifras, abc, def, ghi, donde cada letra representa un dígito del 1 al 9 sin que se repitan. Si la suma de los tres números termina en 65, ¿cuál es el valor de dicha suma?

Problema2. Se dice que un número de cuatro cifras diferentes entre sí y distintas de cero es *Mazatleco*, si al eliminar la mayor y la menor de las cifras, las dos restantes suman 10. Por ejemplo: 6842 y 2468 son *mazatlecos* ya que al realizar la eliminación, la suma queda $4+6=10$. ¿Cuántos números *mazatlecos* hay?

Problema 3. Sean $ABCDEF$ un hexágono regular y M el punto medio del lado AB. Si O es el punto donde se cruzan los segmentos, ADy ME, ¿qué parte del área del hexágono es el área del triángulo OMD?

Problema 4. Julio hace una lista con los números que cumplen las siguientes condiciones:

- El número es de ocho cifras, todas diferentes
- Es múltiplo de 8.
- Cada dos cifras adyacentes en el número, forman un nuevo número que es múltiplo de 7 o de 13. Por ejemplo, para el número $ABCDEFGH$ se necesita que los números de dos cifras $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH$ sean múltiplos de 7 o de 13, aunque no necesariamente todos múltiplos del mismo número.

Encuentra los números de la lista de Julio.

Problema 5. Huberto tiene en su colección de figuras de acción de superhéroes dos *Huk*, dos *Superman*, dos *Iron Man* y dos *Batman* que quiere acomodar en línea sobre una repisa. Quiere que entre cada dos superhéroes iguales haya una cantidad diferente de figuras. Por ejemplo, si hay tres figuras entre los dos *Hulk*, no podría haber tres figuras entre los dos *Batman*.

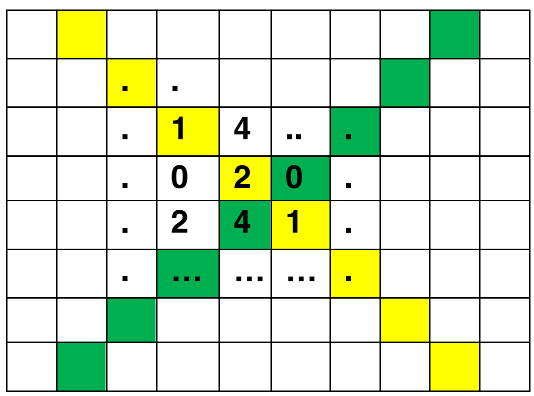
¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer esto?

Problema 6. Sean ABC un triángulo acutángulo, H su ortocentro y M el punto medio de BC. La perpendicular a MH por H corta a AB en L y a AC en N. Muestre que $LH=HN$.

Problema 7. Cierto día en el restaurante *La Cascada* prepararon para el *buffet* de desayuno una charola de cada uno de los siguientes siete platillos: huevos con tocino, frijoles con queso, huevos con jamón, huevos a la mexicana, chilaquiles rojos, chilaquiles con huevo y chilaquiles verdes. Se le ordena al mesero acomodar las charolas de los platillos, alineadas en la barra, de forma tal que las que contengan huevo queden juntas y las que contengan chilaquiles queden juntas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse las charolas en la barra (de izquierda a derecha)?

Problema 8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero que cumple: $AB = AD, AC = BC + CD$ y los ángulos ABC y CDA suman 180°. El triángulo ABC se gira con centro en A formando el triángulo $AB'C'$, como se muestra en la figura, hasta que el punto B' coincida con D, “formándose” el triángulo ADC'. Encuentra la medida del ángulo ACC'.

Problema 9. Sobre una cuadrícula se coloca 2014 veces el número 2014 (un dígito en cada casilla) siguiendo una espiral como se muestra en la figura. Sea M la suma de los números sobre las casillas verdes y N la suma de los números escritos sobre las casillas amarillas. Calcula la diferencia entre M y N.



Problema 10. Se tiene una tabla con siete columnas A, B, C, D, E, F, G y se colocan en ella los números naturales que no contienen al 3 o al 7 en su desarrollo decimal. Si se empieza en la casilla C1, como se muestra, ¿en cuál columna y renglón queda el 2014?

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1			1	2	4	5	6
2	8	9	10	11	12	14	15
3	16	18	19	…			

Problema 11. Sea ABC un triángulo acutángulo isósceles con $AC = BC$. M y N son los puntos medios de AC y BC, respectivamente. La altura desde A corta a la

prolongación de MN en X y la altura desde B corta a la prolongación de MN en Y. Z es la intersección de AY con BX. Además, sucede que los triángulos ABC y XYZ son semejantes. Determina la razón $\frac{AC}{AB}$.

Problema 12. Considere las ecuaciones cuadráticas

$$x^2 - b_1 x + c_1 = 0$$
$$x^2 - b_2 x + c_2 = 0$$
$$x^2 - b_3 x + c_3 = 0$$

con $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ números diferentes.

¿Es posible que los números $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ sean las raíces de las ecuaciones cuadráticas en algún orden? *Nota: se llaman raíces de una ecuación cuadrática a los valores que la resuelven.*

15 ONMAPS
Mexicali, 2015

Problema 1. En la figura se muestra una malla triangular de 4 pisos. ¿Cuál es la cantidad total de triángulos equiláteros que se pueden formar tal que sus lados estén sobre las líneas de una malla triangular de 10 pisos?

Problema 2. En los vértices del heptágono regular $ABCDEF$ se van colocando fichas como sigue:

Primero se colocan fichas saltando de dos en dos: una ficha en A, una ficha en C, una ficha en E, luego en G, después en B, enseguida en D y finalmente en F.

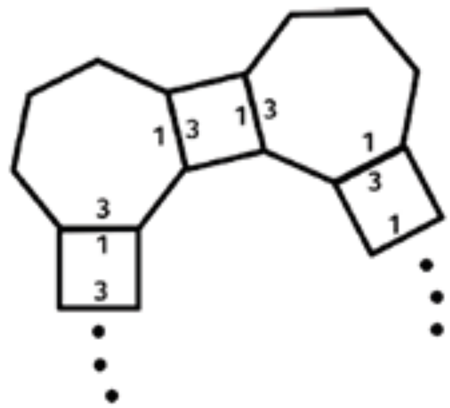
En ese momento, todos los vértices tienen la misma cantidad de fichas y el proceso continúa saltando de tres en tres: una ficha en B, una ficha en E, una en A y cuando todos los vértices tengan la misma cantidad de fichas se continúa con saltos de cuatro en cuatro y cuando tengan todos la misma cantidad se hace de cinco en cinco.

Finalmente, cuando todos los vértices tengan la misma cantidad de fichas, empezamos de nuevo con saltos de dos en dos, luego de tres en tres y así sucesivamente.

¿En qué vértice se coloca la ficha número 2015?

Problema 3. Drini tiene fichas de dos figuras diferentes, cuadrados y polígonos regulares de n lados y los lados de las fichas tienen la misma longitud. Los lados de cada ficha están numerados en el sentido de las manecillas del reloj. Drini inicia con un cuadrado y pega el lado 1 de un polígono con el lado 3 del cuadrado, después pega el lado 1 de un nuevo cuadrado con el lado 3 del polígono anterior y así sucesivamente. ¿Para qué valores de n se puede formar una figura cerrada, es decir, que el lado 1 del primer cuadrado coincida con el lado 3 del último polígono?

Ejemplo: para polígonos de $n = 7$, un segmento de la cadena queda como la figura.



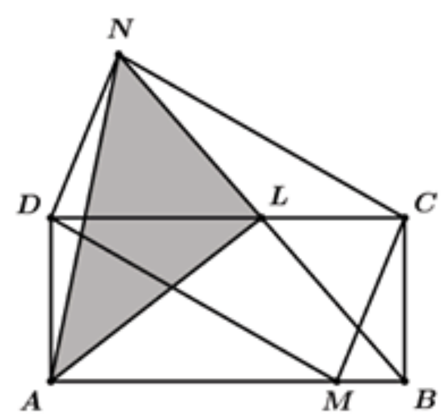
Problema 4. José Luis tiene un costal de 20 pelotas con el número 1, 20 pelotas con el número 2, 20 pelotas con el número 3, 20 pelotas con el número 4 y 20 pelotas con el número 5. ¿Cuál es el mínimo número de pelotas que necesita sacar del costal para asegurarse que siempre haya cinco de las pelotas extraídas cuyos números sumen un múltiplo de 5?

Problema 5. Determina cuántos enteros positivos N de la forma $N = 2^a \cdot 3^b$ hay, con a, b enteros positivos, tales que existen exactamente 2015 enteros positivos D que cumplen las siguientes tres condiciones:

- D divide a N^2
- $D < N$
- D no divide a N

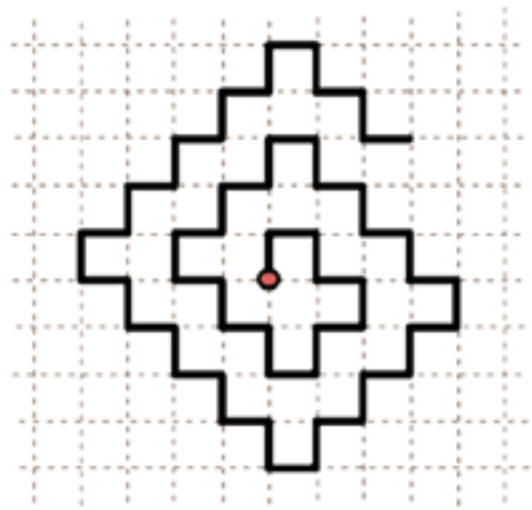
Problema 6. Sean w_1, w_2 dos circunferencias. Sean A, B puntos sobre w_1, w_2, respectivamente, de forma que AB es una tangente común a ambas circunferencias y w_1, w_2 están del mismo lado con respecto a AB. Sean D, C puntos sobre w_1, w_2, respectivamente, de forma que $ABCD$ sea un cuadrilátero cíclico, y que AD y BC se intersequen en E, con C, E en distintos lados con respecto a AB. Demuestra que la circunferencia circunscrita al triángulo CDE es tangente a w_1, w_2.

Problema 7. Sobre el lado AB de un rectángulo $ABCD$ se elige un punto arbitrario M y se traza el paralelogramo $DMCN$ cuya área es 120 cm^2. Sea el punto L la intersección de DC con BN. ¿Cuál es el área del triángulo ANL?



Problema 8. N es un número de 4 cifras y se escribe utilizando los dígitos a, b, c, d de forma que a es la cifra de los millares, b es la de las centenas, c es la de las decenas y d es la de las unidades. Si $a < b < c < d$, ¿cuál es la suma de los dígitos de $9N$?

Problema 9. Una espiral cahinilla se forma con segmentos de recta horizontales y verticales como muestra la figura, iniciando en el punto marcado. Después de colocar 2015 segmentos de recta, ¿a qué distancia horizontal (izquierda o derecha) y a qué distancia vertical (arriba o abajo) del punto inicial, termina la espiral?



Ejemplo: después de 7 segmentos, la espiral está a distancia 1 hacia la derecha y dos hacia abajo del punto inicial.

Problema 10. Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$ y $\angle BAC = 100$ grados. Sea D un punto sobre la prolongación de AB más allá de B, tal que $AD = BC$. Determina la medida del ángulo $\angle BCD$.

Problema 11. Un panal está formado por 20 capas de celdras concéntricas. En la figura se muestran como ejemplo las primeras cuatro capas.

Cada minuto, las abejas llenan celdras del panal con miel de acuerdo con la siguiente regla: si una celda vacía tiene exactamente tres celdras vecinas llenas con miel, entonces las abejas llenan esa celda vacía con miel. Nunca se vacían celdras.

Demuestra que si inicialmente hay 36 celdras llenas de miel, sin importar cuáles son, las abejas nunca llenan todo el panal de miel.

Problema 12. Determina todas las parejas ordenadas de enteros (a, b) tales que:

$$(a + b + 2)^2 = ab(a + 2)(b + 2).$$

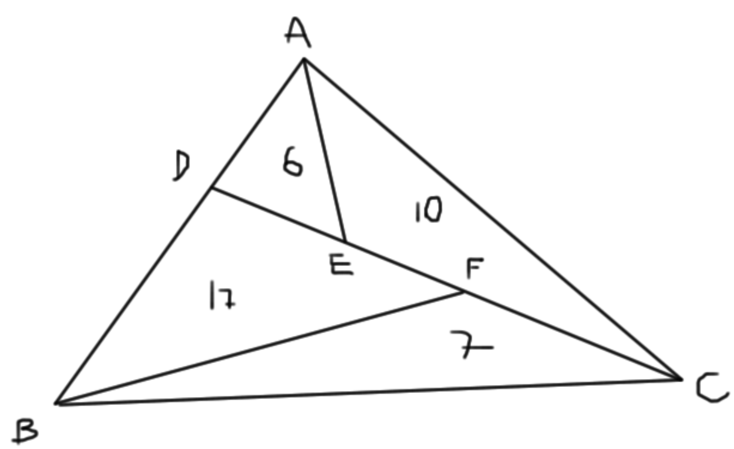
16 ONMAPS
Ciudad de México, 2016

Problema 1. Un salón de clase tiene 50 alumnos. Se sientan todos alrededor de una gran mesa redonda, en orden alfabético siguiendo el sentido de las manecillas del reloj (el último de la lista queda a la derecha del primero de la lista). Se les repartirán unas tarjetas numeradas del 1 al 50, de manera que la diferencia entre los números de las tarjetas de cualquier par de niños que se sienten juntos sea menor que 3.

¿Cuántas maneras diferentes hay de repartir las tarjetas?

Problema 2. Olga escribió una lista con TODOS los números de 4 dígitos que en su escritura NO usan al 7. Por ejemplo, escribió 2012 pero no escribió 4567.
Para cada uno de los números de tal lista, ella multiplica sus dígitos. Luego, suma TODOS los resultados de las multiplicaciones. ¿Qué número obtiene Olga después de realizar estas operaciones?

Problema 3. Sea D un punto sobre el lado AB del triángulo ABC, E es un punto sobre CD y F un punto sobre CE. Las áreas de los triángulos AED, AEC, BFD y BFC son 6, 10, 17 y 7 respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo BEF?



Problema 4. Un duende tiene un saco mágico del que puede sacar cualquier cantidad de monedas que desee. Un día, forma n montones de monedas, cada uno con solo 1 moneda. A continuación, procede a realizar la siguiente operación de forma repetida:

> *Primero escoge dos montones y las junta en uno solo; luego saca tantas monedas de la bolsa como la cantidad de montones que no fueron escogidos, y las añade al nuevo montón que formó.*

Este proceso lo repite hasta que quede solo un montón con monedas. Encuentra todos los posibles valores de n para los cuales, al final de proceso, el último montón tiene 2016 monedas.

Problema 5. Drini hace una lista de 2016 números enteros. Tanto la suma como el producto de estos 2016 números en la lista es igual a 2016. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de números distintos en la lista?

Por ejemplo, en la lista 5, 3, 7, 3, 2 hay cuatro números distintos.

Problema 6. Un cuadrilátero convexo ABCD satisface que las medidas de los ángulos DBC, BDC y BDA son 15, 30 y 45, respectivamente, y BC = AD. Obtén la medida del ángulo CAD.

Un cuadrilátero se llama CONVEXO si la medida de cada uno de sus "ángulos interiores" es menor que 180.

Problema 7. En el cuadrilátero ABCD se tiene que la medida del ángulo ADC es el doble de la medida del ángulo ABC, AB es paralela a CD, AD = 5 y CD = 3. Obtén la medida del lado AB.

Problema 8. En la figura se muestra un salón de clase cuyos pupitres están acomodados en tres filas y tres columnas. Se desea pintar los pupitres de rojo o de verde, de manera que en ninguna fila y en ninguna columna sean todos del mismo color. ¿De cuántas formas distintas se pueden pintar los pupitres del salón?

Problema 9. Sea N un número entero positivo y a, b, c, d los divisores positivos más pequeños de N, en donde $a < b < c < d$. Encuentra todos los valores posibles de N para los cuales $N = bc + d$.

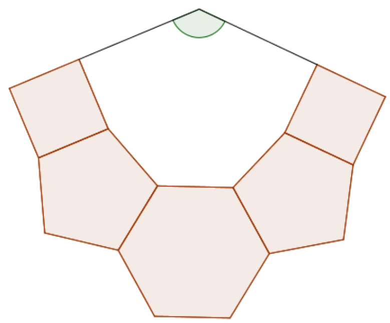
Problema 10. En un triángulo ABC con AB=BC se traza la bisectriz desde C que intersecta a AB en D. El punto E está sobre AC de modo que DC es perpendicular a DE. ¿Cuál es el valor de $\frac{AD}{CE}$?

Problema 11. Un código mexica es una sucesión de ceros y unos que no tiene tres o más dígitos iguales consecutivos. Por ejemplo, 010011010110 y 11001100 son códigos mexicas, mientras que 001111010 no lo es. ¿Cuántos códigos mexicas hay con 12 dígitos en los cuales hay más unos que ceros?

Problema 12. Encuentra todos los enteros positivos a tales que $2a^3 - 3a^2 + 1$ sea la potencia de un primo.

17 ONMAPS
Jerez, 2017

Problema 1. Se fabrica un collar con un hexágono regular, dos pentágonos regulares y dos cuadrados, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo que se forma con las prolongaciones de los extremos?

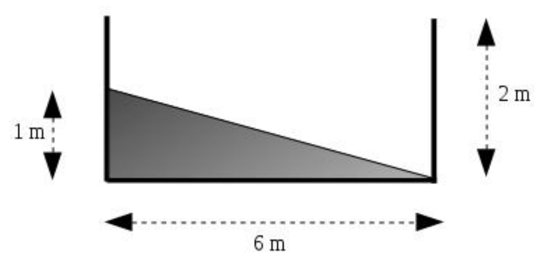


Problema 2. Decimos que un entero positivo es *cuadrofílico* si es múltiplo de 4, 9, 16, 25, 36 y 49, y además la suma de sus dígitos es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el menor *cuadrofílico*?

Problema 3. En una fila hay 2017 galletitas, numeradas del 1 al 2017. Chocoreta se come las galletitas de la siguiente manera: se come una, se salta una; se come otra, se salta dos; se come otra, se salta tres y así sucesivamente hasta llegar al final de la fila. Regresa al inicio y repite el proceso con las galletita que quedaron tantas veces sea necesario hasta que se las come todas. ¿Qué número tiene la última que se come?

Problema 4. Un entero positivo es *jerezano* si sus dígitos son solo 2, 0, 1 o 7, y tiene entre ellos al menos un 2, al menos un 0, al menos un 1 y al menos un 7. Encuentra el menor número *jerezano* que es múltiplo de 20 y 7.

Problema 5. Una alberca que mide 3m de ancho, 6m de largo y 2m de altura tiene un desnivel como se muestra en la figura (empieza a 1m de profundidad en un extremo y llega hasta el fondo en el otro). Inicialmente se encuentra vacía y un grifo la empieza a llenar a razón de 10 litros de agua por minuto. ¿Cuál es la altura del agua después de 100 minutos?

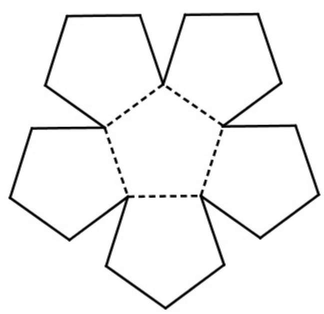


Problema 6. Decimos que una fila de $2k+1$ personas, con k entero positivo, es *picuda* si las primeras k están formadas por estatura en orden creciente, la de en medio es la más alta de todas y las siguientes k están en orden decreciente. Si tenemos 12 personas de estaturas distintas, ¿de cuántas maneras podemos formarlas en dos filas *picudas* una delante de la otra?

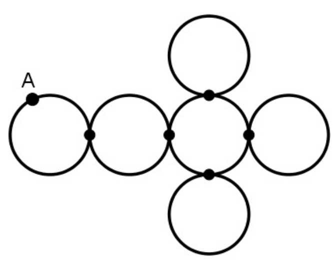
Problema 7. Una lista de n enteros es *autodescriptiva* si el número n aparece en ella. Se quieren repartir todos los números del 1 al 2017 en M listas *autodescriptivas* sin repetir números. ¿Cuáles son los posibles valores de M?

Problema 8. En un restaurant, un mesero atiende a 5 clientes. En cada visita a la mesa puede elegir hacer una de las siguientes cosas: dar el plato a un cliente sin plato, dar el vaso a un cliente sin vaso, servir la comida en un plato vacío o servir la bebida en un vaso vacío. ¿De cuántas formas puede hacer las 20 visitas que necesita para atender por completo a todos?

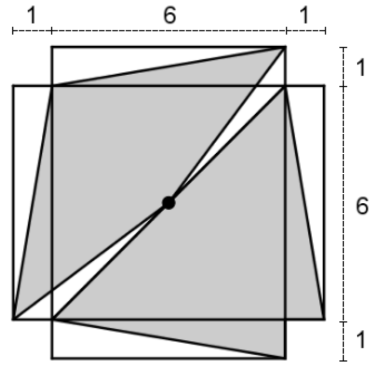
Problema 9. Con la figura, formada por 6 pentágonos regulares de área 1, se construye un recipiente doblando sobre las líneas punteadas hasta que los lados de cada 2 pentágonos exteriores contiguos coincidan en una arista. El mismo se llena con agua hasta que empieza a desbordarse. En ese momento, ¿cuál es el área de la superficie del agua?



Problema 10. Yareli pasea a Dimi en un circuito formado por seis círculos, como se muestra en la figura. Están paradas en el punto A y quieren recorrer todo el circuito con la condición de no pasar dos veces por el mismo arco. ¿De cuántas formas pueden hacer su paseo?

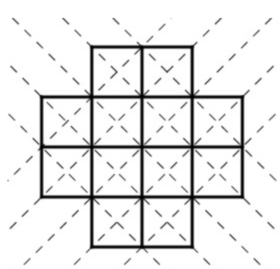


Problema 11. En la figura se muestran dos rectángulos de 6×8 cuyos centros coinciden. ¿Cuál es el valor del área de la región sombreada?



Problema 12. En una lista se escriben de menor a mayor todos los números con menos de 8 cifras que se forman solamente con 4's y 7's. Se escribe una lista más con las diferencias entre los números consecutivos que aparecen en la primera. ¿Cuántos números distintos aparecen en esta segunda lista?

Problema 13. Andrea quiere llenar el siguiente tablero usando 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, de manera que al multiplicar los números que se encuentran como cada una de las líneas punteadas, el resultado sea un múltiplo de 10. ¿De cuántas maneras se puede lograr?



Problema 14. Sea ABC un triángulo tal que el lado AB es igual al doble del lado BC. Se toman puntos D, E sobre el lado AB de forma que CD sea perpendicular a AB y CE sea la bisectriz de $\angle ACD$. La prolongación de CE intersecta en F a la paralela a AC que pasa por B. Si $\angle CEB$ mide $60°$, ¿cuánto mide $\angle AFC$?

Problema 15. ¿Cuántas listas a, b, c, d, e que se obtienen reacomodando los números 1, 2, 3, 4, 5 tienen la propiedad de que la suma $ab + bc + cd + de + ea$ es divisible por 3?

Problema 16. Una *contraseña universal* es un número formado por 1's, 2's, 3's y 4's en el que *aparecen* todos los números de 4 cifras distintas formados por esos dígitos. ¿Cuál es la menor cantidad de dígitos que puede tener una contraseña universal?

NOTA: por ejemplo, en el número 123321 *aparecen* 123, 3321 y 32, entre otros; pero no aparecen 11 ni 231.

Problema 17. Sea ABC un triángulo cuyo ángulo en A vale $135°$. Sea M el punto medio de BC, si $\angle MAB = 90°$ y $MB = 5$, ¿cuánto vale el área de ABC?

Problema 18. Sean A y B dos enteros positivos tales que:

- A no es un cuadrado.
- $A - B$ es el cuadrado de un primo.
- $A + B$ es el cubo de un primo.

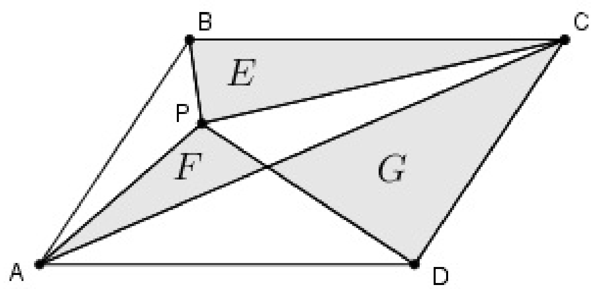
Demuestra que AB no puede ser un cuadrado perfecto.

18 ONMAPS
Gómez Palacio, 2018

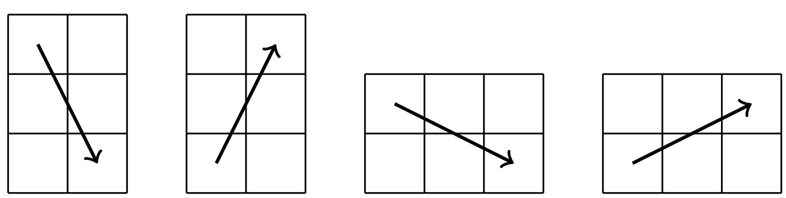
Problema 1. Un número es *lagunero* si cada uno de sus dígitos coincide con la cantidad de veces que aparece en el número. Por ejemplo, el número 52525155 es *lagunero* porque el 5 aparece cinco veces, el 2 aparece dos veces y el 1 aparece una vez. ¿Cuántos números *laguneros* de 6 dígitos existen?

Problema 2. En la siguiente figura tenemos un paralelogramo $ABCD$. Se traza la diagonal AC y se coloca un punto P en el interior, de manera que el área E vale 10, mientras que 3 veces el área de F es igual al área de G.

¿Cuál es el valor del área F?



Problema 3. Considera una cuadrícula de 8×8. Un movimiento en la cuadrícula consiste en desplazarse dos casillas a la derecha y una casilla verticalmente, o una casilla a la derecha y dos verticalmente:



Usando esos movimientos, ¿cuántos recorridos hay que empiecen en la primera columna y terminen en la última columna?

Problema 4. Lio escoge números de 4 cifras múltiplos de 12 pero no múltiplos de 7, tales que sus dígitos sumen una cantidad mayor que 29. Encuentra todos los números que Lio pudo escoger.

Problema 5. Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Llamemos P a la intersección de las prolongaciones de los lados AB y DE. Sean Q, R puntos fuera del pentágono tales que $DEQR$ es paralelogramo con todos sus lados iguales y con EQ paralelo a AB. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle RPQ$?

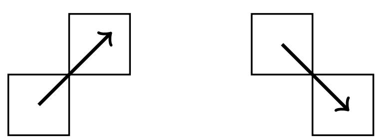
Problema 6. A un entero positivo lo coloreamos de la siguiente forma:

- De la mitad hacia la izquierda, lo coloreamos de azul.
- De la mitad hacia la derecha, lo coloreamos de rojo.
- Si el número tiene una cantidad impar de dígitos, el dígito del centro se colorea de verde.

Un *paso* consiste en sacar la diferencia de los números obtenidos en azul y rojo, y después sumar el valor del verde (si es que hay). Decimos que un número es *especial* si después de uno o más *pasos* se llega hasta el 0. ¿Cuántos números *especiales* menores que 10,000 existen?

Nota: Por ejemplo, si comenzamos con el 12345, el 12 se colorea de azul, el 45 se colorea de rojo y el 3 se colorea de verde, por lo tanto el resultado de un *paso* es $45 - 12 + 3 = 36$.

Problema 7. En el centro de una cuadrícula de 75×75 se encuentra una ranita. Cada minuto, la ranita salta a una casilla vecina con alguno de los dos movimientos siguientes: hacia arriba y a la derecha, o hacia abajo y a la derecha:

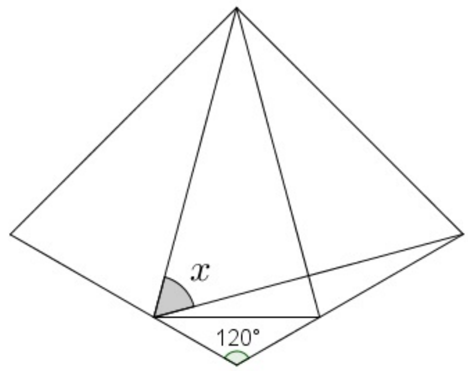


Después de cierto tiempo, ha llegado a una casilla que está a 20 casillas a la derecha y 8 arriba de la posición inicial. Si durante su recorrido hizo tres cambios de dirección, ¿cuántos recorridos distintos pudo hacer?

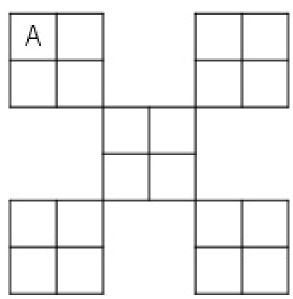
Problema 8. Encuentra el menor entero positivo n tal que un tablero de $n \times n$ puede llenarse con fichas de 2×9 de manera que las fichas no se traslapen y que quede exactamente una casilla del tablero sin cubrir.

Problema 9. Sea $ABCDEF$ un hexágono regular. Sea P la intersección de AE con CF. Sea X un punto sobre el segmento FE, distinto de F, tal que $4PX = XC$. Sea Y la intersección de XP con AB. Demuestra que $YP = YC$.

Problema 10. En la figura se tienen tres triángulos isósceles iguales pegados uno al otro, compartiendo el vértice A. Si se extienden las bases de los triángulos de los extremos, dichas extensiones se cortan formando un ángulo de $120°$. ¿Cuánto vale, en grados, el ángulo marcado con x?

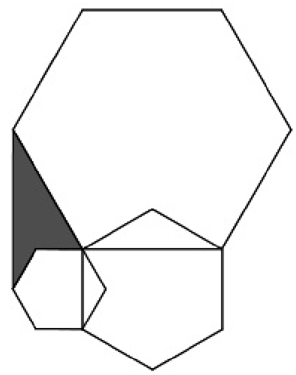


Problema 11. La rana René está en un estanque con 20 lirios cuadrados como se muestra en la figura. Solo puede saltar entre lirios que tengan algún vértice en común y, cada vez que abandona un lirio, éste se hunde y no puede volver a usarlo. Un *camino* consiste en una secuencia de saltos que empieza en algún lirio y termina cuando ya no puede dar saltos. ¿Cuántos *caminos* que empieza en A puede tomar la rana René?



Problema 12. En una bolsa hay papelitos con los números del 1 al 2018 escritos uno en cada papel. Pedro le da a Carlos algunos de esos papelitos y Carlos se da cuenta que siempre que toma 3 de ellos, la suma de los números escritos en los 3 papelitos es un número primo. ¿Cuál es la mayor cantidad de papelitos que le pudo haber dado Pedro a Carlos?

Problema 13. Se tienen tres hexágonos regulares como se muestra en la figura. Encuentra el área sombreada si el lado del hexágono más pequeño mide 2.



Problema 14. ¿Cuántos números de 3 cifras abc existen tales que

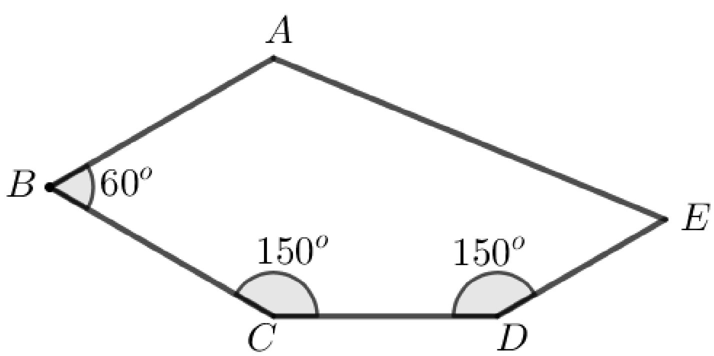
$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=10?$$

Donde $|a-b|$ quiere decir la diferencia no negativa entre a y b.

Problema 15. Encuentra todas las ternas de números primos (p, q, r) tales que

$$2p+3q+5r=p^2+q^2+r^2.$$

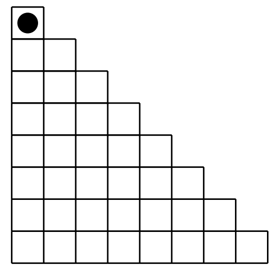
Problema 16. En el pentágono $ABCDE$ se tiene que $AB=BC=8$, $CD=4\sqrt{3}$ y $DE=6$. Además, $\angle ABC=60°$, $\angle BCD=\angle CDE=150°$. Determina el área de $ABCDE$.



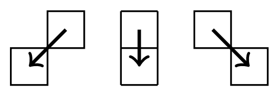
Problema 17. Encuentra todos los enteros positivos n tales que, para cualquier divisor d de n, se cumple que $n+d!$ es un cuadrado perfecto.

Nota: $d!$ es el producto de todos los enteros desde 1 hasta d.

Problema 18. Encuentra el número de maneras en que puedes llevar la ficha que está en la parte superior de la figura:



hasta cualquier casilla de la fila inferior, usando únicamente los movimientos



sin usar dos veces consecutivas el mismo movimiento.

19 ONMAPS
Tepic, 2019

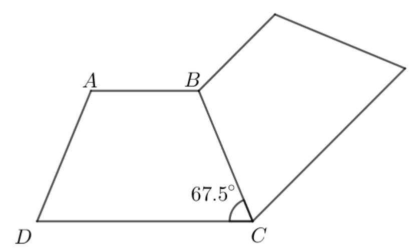
Problema 1. Decimos que un número de cuatro dígitos es *tepiqueño* si es impar, la suma de sus dígitos es 12 y la multiplicación de sus dígitos es 0. ¿Cuál es la resta del *tepiqueño* más grande menos el *tepiqueño* más pequeño?

Problema 2. Decimos que un número está *derecho* si cada uno de sus dígitos cumple las siguientes condiciones:

- Si el dígito es par, indica la cantidad de dígitos impares que hay a su derecha.
- Si el dígito es impar, indica la cantidad de dígitos pares que hay a su derecha.

Encuentra todos los números *derechos* de 8 dígitos.

Problema 3. Zeus tiene varios trapecios isósceles iguales al $ABCD$ de la figura, tales que AB es paralelo a CD, DC es el doble de AB, y con área igual a $24cm^2$. Los puede pegar por un lado de cada trapecio como se muestra en la figura, hasta que un lado del trapecio coincida con el lado AD, dando como resultado dos polígonos regulares, uno chico y uno grande que contiene al chico. ¿Cuál es el área total del polígono grande?



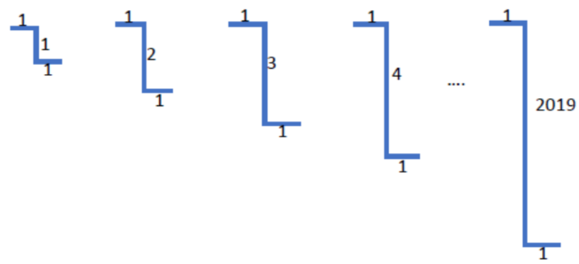
Problema 4. Orlando tiene algunos tableros de $3{\times}3$, cada uno con los números del 1 al 9 iguales a los de la figura, y colorea las casillas de blanco o negro de la siguiente forma: elige dos tableros y un número, y en el primer tablero cambia de color (de negro a blanco o de blanco a negro) las tres casillas de la columna en la que está el número elegido, mientras que en el segundo tablero cambia de color las tres casillas del renglón en el que está el mismo número elegido. Si inicialmente todos los tableros son blancos y quiere colorearlos a negro repitiendo el proceso las veces que sea necesario,

1	2	3
4	5	6
7	8	9

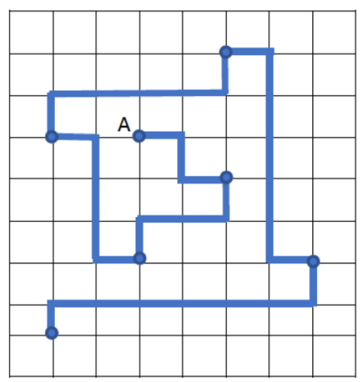
a) ¿Podrá hacerlo si tiene 2018 tableros?
b) ¿Podrá hacerlo si tiene 2019 tableros?

Problema 5. Decimos que un número entero n mayor que cero es *exótico* si de entre los divisores de n que sean mayores que 1, puedes encontrar alguno cuya suma de dígitos es 9, otro cuya suma de dígitos es 8, otro cuya suma de dígitos es 7, y así sucesivamente hasta uno cuya suma de dígitos es 1. ¿Cuál es el segundo número exótico más pequeño que también es un cuadrado perfecto?

Problema 6. Isaac tiene 2019 piezas de la siguiente forma:



y las acomoda en un tablero cuadriculado de la siguiente forma:



acomodando las 2019 piezas siguiendo el patrón de la figura de arriba. ¿Cuántos cuadros en vertical y en horizontal hay para llegar desde el punto A hasta el final de la pieza 2019? Por ejemplo: desde el punto A hasta el final de la pieza 6 hay 5 hacia abajo y 2 hacia la izquierda.

Problema 7. Sea $ABCD$ un cuadrado. La semicircunferencia de diámetro AB trazada por adentro del cuadrado interseca a la circunferencia de centro C y radio BC en P. La recta CP interseca al circuncírculo del triángulo APD en Q (distinto de P). Demuestra que $\angle BCQ = 2\angle DQC$.

Problema 8. Los números $p < q < r < s$ son cuatro números primos tales que

$$p^2 + q + s = pqr$$

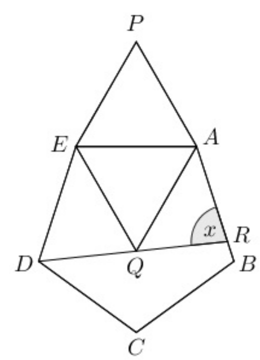
y

$$rs - 1 = pq + p^2q^2 + p^3q^3.$$

Encuentra el valor de $p^2qs - 1$.

Problema 9. Se tiene un triángulo equilátero de papel cuyo lado mide 2019. En cada una de las tres esquinas se va a recortar un triángulo equilátero cuyo lado tenga longitud entera. Estos tres triángulos pueden medir distinto. El triángulo recortado de la esquina de arriba se punta de dorado, el triángulo recortado de la esquina izquierda se pinta de plateado y el recortado de la esquina derecha se pinta de negro. ¿De cuántas formas se pueden hacer los cortes?

Problema 10. En la figura se tiene $ABCDE$ un pentágono regular y APE un triángulo equilátero. Q es un punto en el interior del pentágono de manera que $PAQE$ es un rombo. Sea R la intersección de las rectas DQ con AB. Encuentra el valor del ángulo $\angle QRA$.



Problema 11. Cinco amigos fueron a participar en una Olimpiada de Matemáticas. El examen era de 54 problemas de opción múltiple para resolver en tres horas. Cada acierto suma 9 puntos, cada respuesta incorrecta resta 4 puntos y cada pregunta sin contestar no suma ni resta puntaje. Los 5 amigos obtuvieron el mismo puntaje (mayor que 0), pero la cantidad de aciertos, errores y preguntas no respondidas de los amigos fue diferente. Determinar los posibles puntajes que obtuvieron los amigos.

Problema 12. Hilbert escribe en su libreta todos los números N que cumplen las siguientes condiciones:

i. N tiene 7 dígitos todos distintos.
ii. Cuando se borran tres de los dígitos de N, quedan escritos los números 2, 0, 1, 9, en ese orden.
iii. N es múltiplo de 3.

¿Cuántos números hay en la lista de Hilbert?

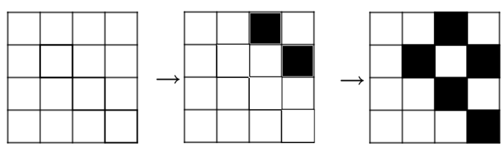
Problema 13. Un número de 6 dígitos distintos $\overline{abcdef}$ es *curioso* si cumple las siguientes condiciones:

- El número de 3 cifras $\overline{abc}$ es un múltiplo de 5.
- El número de 3 cifras $\overline{bcd}$ es múltiplo de 17.
- El número de 4 cifras $\overline{abcd}$ tiene sus dígitos en progresión aritmética (no necesariamente en orden).

¿Cuántos números *curiosos* son múltiplos de 9?

Problema 14. Sea $ABCDEF$ un hexágono regular de lado 3. Sobre los lados $AF,\ ED$ se marcan puntos $M,\ N$ tales que $FM = EN = 2$. Sea P la intersección de BE con MN. Calcula la medida del segmento PD.

Problema 15. Se tiene un tablero cuadriculado de $n\times n$, con $n \geq 3$, con todas sus casillas pintadas de blanco. Un cambio consiste en elegir un subtablero de 2×2 o de 3×3 y cambiar el color de todas las casillas de una de sus diagonales (de blanco a negro o de negro a blanco).
Este es un ejemplo de una secuencia de cambios en un tablero de 4×4.



¿Para qué valores de n es posible en algún momento tener todo el tablero de negro?

Problema 16. Sean $a < b < c < d$ enteros positivos tales que a divide a b, b divide a c, y c divide a d. Además, ninguno de ellos es divisible por el cuadrado de un número primo. Encuentra todas las cuartetas que cumplen lo anterior y tales que $a + b + c + d = 2019$.

Problema 17. En el pizarrón está escrito el número 2019, dos mil diecinueve veces en línea. Se van a borrar todos los dígitos menos cuatro, de manera que los cuatro dígitos que sobren sean 2, 0, 1, 9, en ese orden. ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?

Problema 18. Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$ y $\angle BAC = 20°$. La bisectriz del $\angle ABC$ interseca a AC en D. Si O es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, C, calcula $\angle ADO$.

Puedes encontrar algunas de las soluciones
uniéndote a la comunidad de **patreon.com/ugesaurio**
y apoyando nuestro proyecto.