CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas

Soluciones OMMEB

Benito Vicente Franco López

9 de enero de 2025

Examen 1 - Cuarto y Quinto de Primaria

Problema 1

Un motociclista entrena para una carrera. El primer día recorre 200 km, el segundo día 280 km, el tercer día 360 km y así sucesivamente, cada día recorre 80 km más que el día anterior. Si luego de cierta cantidad de días ha recorrido un total de 4680 km, ¿cuántos días duró su entrenamiento?

Solución

Notemos que para el día n se ha recorrido:

$$200 + (200 + 80) + (200 + 80 \cdot 2) + \cdots + [200 + 80 \cdot (n - 1)]$$

Esto se puede expresar como:

$$200n + 80\,[1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)]$$

Sabemos que la suma de los primeros $n - 1$ números naturales es:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Por lo tanto:

$$200n + 80 \cdot \frac{n(n - 1)}{2} = 200n + 40n(n - 1).$$

Simplificando:

$$200n + 40n^2 - 40n = 40n^2 - 160n.$$

Entonces, se debe cumplir:

$$40n^2 - 160n = 4680.$$

Dividiendo entre 40 para simplificar:

$$n^2 - 4n = 117.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$n^2 - 4n - 117 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

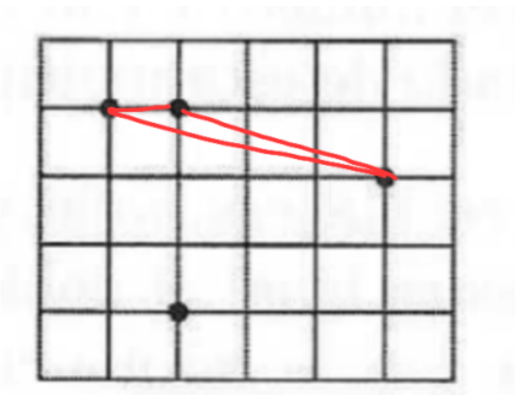
$$n = 9.$$

Problema 2

La cuadrícula está formada por cuadritos de lado 1 cm. En ella se marcaron 4 puntos. ¿Cuál es el área más pequeña que puede tener un triángulo que tenga por vértices a 3 de los puntos marcados?

Solución

De los 4 triángulos posibles, el más pequeño es el siguiente:



En este caso, el triángulo tiene una base y una altura de 1 cm. El área del triángulo se calcula como:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\,\text{cm}^2.$$

Problema 3

En cada una de las caras del cubo de la figura está escrito algún número del 1 al 9 de manera que todos los números son distintos. Además, la suma de los números en cada pareja de caras opuestas es la misma. ¿Qué número queda opuesto al 5?

Solución

La suma de cada 2 caras opuestas es mayor que 8, por lo que debajo del 5 debe haber un número mayor a 3. Tenemos como opciones válidas 6, 7, 9. Si intentamos con 7, obtenemos el siguiente acomodo válido:

$$5 + 6 = 11, \quad 8 + 3 = 11, \quad 4 + 7 = 11.$$

Por lo tanto, debajo del 5 está el 6.

Problema 4

Luisa piensa en un número. Primero, lo multiplica por 3. Al resultado de esa operación le suma 3. Al resultado de esa suma lo divide entre 3 y, finalmente, al resultado de esa división le resta 3. Si obtuvo como resultado el número 6, ¿en qué número pensó Luisa originalmente?

Solución

Sea x el número en el que piensa Luisa, se hace el siguiente proceso:

$$x \to 3x \to 3x + 3 \to \frac{3x+3}{3} = x + 1 \to x - 2$$

Por lo que tenemos la siguiente ecuación:

$$x - 2 = 6$$

Resolviendo:

$$x = 8$$

Luisa pensó originalmente en el 8.

Problema 5

¿Cuál es el último dígito de la siguiente multiplicación?

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 2025$$

Solución

Notemos que cualquier número impar multiplicado por un múltiplo de 5 termina en 5.
Luego, el último dígito de dicha multiplicación es 5.

Problema 6

Tengo cierto número de monedas, algunas en la mano derecha y otras en la izquierda. Si pasara una moneda de la mano derecha a la izquierda, tendría igual número de monedas en cada mano. Si en lugar de ello pasara una moneda de la izquierda a la derecha, tendría en la mano izquierda la mitad de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tengo en total?

Solución

Sea D e I las monedas en la mano derecha e izquierda, respectivamente. Se cumple lo siguiente:

$$D - 1 = I + 1$$
$$D + 1 = 2(I - 1).$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$-2 = -I + 3.$$

Resolviendo, obtenemos:

$$I = 5, \quad D = 7.$$

Solución alternativa

Sean D e I las monedas en la mano derecha e izquierda, respectivamente. La primera ecuación implica que hay 2 monedas más en la mano derecha que en la izquierda.

Podemos probar varias parejas de valores para ver si se cumple que, al pasar una moneda de la izquierda a la derecha, en la derecha se tiene el doble de monedas que en la izquierda. La tabla a continuación muestra este análisis:

D	I	$D+1$	$I-1$	Cumple
5	3	6	2	No
6	4	7	3	No
7	5	8	4	Sí

Por lo tanto, obtenemos $I = 5$ y $D = 7$.

Problema 7

Hay algunos números que pueden leerse de la misma forma de izquierda a derecha que de derecha a izquierda; por ejemplo, los números 1001, 2112 y 4002004. A estos números les llamamos *capicúa*. ¿Cuántos años capicúa han habido desde el año 100 hasta el año actual? Recuerda que estamos en el año 2024.

Solución

Para los números de 3 cifras del 100 al 999, se puede hacer lo siguiente: Para las centenas podemos poner cualquiera del 1 al 9. Como el número debe ser capicúa, este dígito debe ser el mismo que las unidades. Para las decenas, podemos poner cualquier dígito del 0 al 9.
Por lo tanto, hay:

$$9 \times 10 = 90 \text{ capicúas de 3 dígitos.}$$

Ahora, del 1000 al 1999, solo podemos formar 10 capicúas:

$$\{1001, 1111, 1221, \ldots, 1991\}.$$

Finalmente, del 2000 al 2024, solo el 2002 es capicúa.

Por lo tanto, el total de capicúas es:

$$90 + 10 + 1 = 101.$$

Problema 8

Ximena comienza a contar desde un determinado número, el cual dice (en voz alta); no dice los dos números siguientes, dice en voz alta el número que sigue y vuelve a brincarse los dos siguientes. Continúa de esta manera hasta pronunciar el séptimo número que fue el 53. ¿En qué número inició el conteo?

Solución

Notemos que Ximena dice en voz alta cada 3 números, por lo que, si vamos al revés, tenemos la siguiente sucesión:

$$53, 50, 47, 44, 41, 38, 35$$

Por lo que el número en que empezó a contar fue 35.

Problema 9

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números que va

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Si Toscano conoce los primeros 2024 términos de la secuencia, ¿cuántos de esos términos son impares?

Solución

Se debe notar que cada tercer término de la sucesión de Fibonacci es par. Esto se debe a las siguientes propiedades:

$$\text{impar} + \text{impar} = \text{par}, \quad \text{impar} + \text{par} = \text{impar}.$$

Por lo tanto, si dividimos 2024 entre 3, obtenemos que:

$$\frac{2024}{3} = 674$$

términos son pares. Por lo tanto, el resto de los términos son impares:

$$2024 - 674 = 1350.$$

Así, hay 1350 términos impares en la sucesión de Fibonacci hasta el término 2024.

Problema 10

Sebas sale en carretera rumbo a Oaxtepec para presentar un examen de matemáticas. Él va a 80 km/h durante media hora, luego, cambia de velocidad a 20 km/h durante 90 minutos porque había tráfico y finalmente tiene una velocidad de 100 km/h durante 20 minutos. ¿Cuánta distancia ha recorrido?

Solución

Multiplicamos la velocidad por el tiempo recorrido en horas y obtenemos:

$$\text{Distancia} = 80\left(\frac{1}{2}\right) + 20\left(\frac{3}{2}\right) + 100\left(\frac{1}{3}\right)$$

Simplificando:

$$\text{Distancia} = 40 + 30 + 33{,}333 \approx 103{,}333\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es aproximadamente 103,333 km.

Problema 11

Diego se encuentra multiplicando números por diversión. Él toma un mismo número y lo multiplica por sí mismo varias veces. Por ejemplo, si tomara el tres y lo multiplicara por sí mismo 4 veces obtendría

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

Diego ha tomado el número 7 y lo ha multiplicado por sí mismo 2024 veces. ¿Cuál es el dígito de las unidades del resultado de esta multiplicación?

Solución

Al multiplicar un número por sí mismo k veces, siempre se genera un patrón en el dígito de las unidades. Notemos cuál es el patrón que se genera para el 7:

Número	Dígito de las unidades
7^1	7
7^2	9
7^3	3
7^4	1
7^5	7
7^6	9
7^7	3
7^8	1

Observamos que el patrón se repite cada 4 veces.
Luego, como 2024 es múltiplo de 4, el número 7^{2024} termina igual que 7^4 o 7^8, es decir, en 1.

Problema 12

En una caja hay bolitas de tres colores: blancas, rojas y verdes. En total hay 315 bolitas. La cantidad total de bolitas verdes y bolitas rojas es igual al doble de la cantidad de bolitas blancas. Iván sacó 30 bolitas verdes y ahora, en la caja, hay la misma cantidad de bolitas verdes que de bolitas rojas. ¿Cuántas bolitas verdes había inicialmente?

Solución

Sean B, R y V el número de bolitas blancas, rojas y verdes iniciales, respectivamente. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V + B + R = 315 \quad (1)$$
$$V + R = 2B \quad (2)$$
$$V - 30 = R \quad (3).$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos:

$$3B = 315 \quad \Rightarrow \quad B = 105.$$

Por lo que:

$$V + R = 210, \quad V - 30 = R.$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$2V - 30 = 210 \quad \Rightarrow \quad 2V = 240 \quad \Rightarrow \quad V = 120.$$

Concluimos que inicialmente había 120 bolitas verdes.

Problema 13

Nuria tiene un cajón de calcetines muy desordenado. Tiene 5 calcetas azules, 3 calcetas rojas y una calceta café. Nuria juega un juego en el que saca calcetas, una por una, del cajón con los ojos vendados. Después de sacar alguna cantidad, se quita la venda. Ella gana si sacó dos calcetas del mismo color y pierde si no lo hizo. ¿Cuál es la mínima cantidad de calcetas que debe sacar Nuria para asegurarse de siempre ganar su juego?

Solución

En el peor de los casos, Nuria podría sacar una calceta de cada color, es decir, una azul, una roja y una café; por lo tanto, si Nuria saca 4 calcetas, puede asegurar ganar el juego.

Problema 14

Berta hace una lista con todos los números de tres cifras que cumplen que la suma de sus dígitos es 8. Por ejemplo, el número 521 está en esa lista porque $5+2+1=8$. ¿Cuánto vale la suma del mayor y el menor número de esta lista?

Solución

El número mayor es 800 y el menor es 107.
Luego, la suma de ambos números es:

$$800 + 107 = 907.$$

Problema 15

Un entero positivo n tiene tres dígitos. El dígito de las centenas de n es igual a la suma de los dígitos de las unidades y las decenas. Además, si multiplicamos por 4 el dígito de las unidades de n se obtiene la suma de los dígitos de las centenas y las decenas. ¿Qué número es n?

Solución

Sean u, d, c los dígitos de las unidades, decenas y centenas, respectivamente. Se debe cumplir:

$$c = u + d$$

$$c + d = 4u.$$

Las opciones para $c + d$ son: $4, 8, 12, 16$.

Si tomamos $c+d=8$, de la segunda ecuación podemos deducir $u=2$, y ocupando la primer ecuación obtenemos $c=5$, $d=3$. Por lo tanto:

$$n = 532.$$

Examen 2 - Sexto de Primaria

Problema 1

¿Cuál es el último dígito de la siguiente multiplicación?

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 2025$$

Solución

Notemos que cualquier número impar multiplicado por un múltiplo de 5 termina en 5.
Luego, el último dígito de dicha multiplicación es 5.

Problema 2

A un pedazo cuadrado de cartón se le recortan, de las 4 esquinas, 4 cuadrados de 2 cm de lado. Luego, el cartón se dobla para formar una caja de $180\,\text{cm}^2$ de superficie.
¿Cuál es el volumen de esta caja?

Solución

Sea x el lado del cartón cuadrado original. Luego, al recortar 2 cm de cada esquina, la base de la caja será:

$$\text{Base} = x - 4.$$

La altura de la caja es la longitud de los cuadrados recortados, es decir, 2 cm.

La superficie total de la caja está dada por la suma del área de la base y el área de las 4 paredes laterales:

$$\text{Superficie} = \text{Área de la base} + \text{Área de las paredes laterales.}$$

La superficie total es $180\,\text{cm}^2$, por lo que podemos expresar:

$$\text{Superficie} = (x-4)^2 + 4 \cdot 2(x-4) = 180.$$

Simplificamos:

$$(x-4)^2 + 8(x-4) = 180.$$

Sea $y = x - 4$, entonces:

$$y^2 + 8y - 180 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(-180)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{784}}{2}.$$

$$y = \frac{-8+28}{2} = 10 \quad \text{(porque el lado debe ser positivo).}$$

Entonces:

$$x - 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 14.$$

El lado de la base es:

$$x - 4 = 10\,\text{cm}, \quad \text{y la altura es } 2\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, el volumen de la caja es:

$$\text{Volumen} = \text{Base} \times \text{Base} \times \text{Altura} = 10 \cdot 10 \cdot 2 = 200\,\text{cm}^3.$$

Por lo que concluimos que el volumen de la caja es $200\,\text{cm}^3$.

Problema 3

Tengo cierto número de monedas, algunas en la mano derecha y otras en la izquierda. Si pasara una moneda de la mano derecha a la izquierda, tendría igual número de monedas en cada mano. Si en lugar de ello pasara una moneda de la izquierda a la derecha, tendría en la mano izquierda la mitad de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tengo en total?

Solución

Sea D e I las monedas en la mano derecha e izquierda, respectivamente. Se cumple lo siguiente:

$$D - 1 = I + 1$$
$$D + 1 = 2(I - 1).$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$-2 = -I + 3.$$

Resolviendo, obtenemos:

$$I = 5, \quad D = 7.$$

Solución alternativa

Sean D e I las monedas en la mano derecha e izquierda, respectivamente. La primera ecuación implica que hay 2 monedas más en la mano derecha que en la izquierda.

Podemos probar varias parejas de valores para ver si se cumple que, al pasar una moneda de la izquierda a la derecha, en la derecha se tiene el doble de monedas que en la izquierda. La tabla a continuación muestra este análisis:

D	I	$D+1$	$I-1$	Cumple
5	3	6	2	No
6	4	7	3	No
7	5	8	4	Sí

Por lo tanto, obtenemos $I = 5$ y $D = 7$.

Problema 4

Hay algunos números que pueden leerse de la misma forma de izquierda a derecha que de derecha a izquierda; por ejemplo, los números 1001, 2112 y 4002004. A estos números les llamamos *capicúa*. ¿Cuántos años capicúa han habido desde el año 100 hasta el año actual? Recuerda que estamos en el año 2024.

Solución

Para los números de 3 cifras del 100 al 999, se puede hacer lo siguiente: Para las centenas podemos poner cualquiera del 1 al 9. Como el número debe ser capicúa, este dígito debe ser el mismo que las unidades. Para las decenas, podemos poner cualquier dígito del 0 al 9.
Por lo tanto, hay:

$$9 \times 10 = 90 \text{ capicúas de 3 dígitos.}$$

Ahora, del 1000 al 1999, solo podemos formar 10 capicúas:

$$\{1001, 1111, 1221, \ldots, 1991\}.$$

Finalmente, del 2000 al 2024, solo el 2002 es capicúa.

Por lo tanto, el total de capicúas es:

$$90 + 10 + 1 = 101.$$

Problema 5

Ximena comienza a contar desde un determinado número, el cual dice (en voz alta); no dice los dos números siguientes, dice en voz alta el número que sigue y vuelve a brincarse los dos siguientes. Continúa de esta manera hasta pronunciar el séptimo número que fue el 53. ¿En qué número inició el conteo?

Solución

Notemos que Ximena dice en voz alta cada 3 números, por lo que, si vamos al revés, tenemos la siguiente sucesión:

$$53, 50, 47, 44, 41, 38, 35$$

Por lo que el número en que empezó a contar fue 35.

Problema 6

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números que va

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Si Toscano conoce los primeros 2024 términos de la secuencia, ¿cuántos de esos términos son impares?

Solución

Se debe notar que cada tercer término de la sucesión de Fibonacci es par. Esto se debe a las siguientes propiedades:

$$\text{impar} + \text{impar} = \text{par}, \quad \text{impar} + \text{par} = \text{impar}.$$

Por lo tanto, si dividimos 2024 entre 3, obtenemos que:

$$\frac{2024}{3} = 674$$

términos son pares. Por lo tanto, el resto de los términos son impares:

$$2024 - 674 = 1350.$$

Así, hay 1350 términos impares en la sucesión de Fibonacci hasta el término 2024.

Problema 7

Sebas sale en carretera rumbo a Oaxtepec para presentar un examen de matemáticas. Él va a 80 km/h durante media hora, luego, cambia de velocidad a 20 km/h durante 90 minutos porque había tráfico y finalmente tiene una velocidad de 100 km/h durante 20 minutos. ¿Cuánta distancia ha recorrido?

Solución

Multiplicamos la velocidad por el tiempo recorrido en horas y obtenemos:

$$\text{Distancia} = 80\left(\frac{1}{2}\right) + 20\left(\frac{3}{2}\right) + 100\left(\frac{1}{3}\right)$$

Simplificando:

$$\text{Distancia} = 40 + 30 + 33{,}333 \approx 103{,}333\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es aproximadamente 103,333 km.

Problema 8

Diego se encuentra multiplicando números por diversión. Él toma un mismo número y lo multiplica por sí mismo varias veces. Por ejemplo, si tomara el tres y lo multiplicara por sí mismo 4 veces obtendría

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

Diego ha tomado el número 7 y lo ha multiplicado por sí mismo 2024 veces. ¿Cuál es el dígito de las unidades del resultado de esta multiplicación?

Solución

Al multiplicar un número por sí mismo k veces, siempre se genera un patrón en el dígito de las unidades. Notemos cuál es el patrón que se genera para el 7:

Número	Dígito de las unidades
7^1	7
7^2	9
7^3	3
7^4	1
7^5	7
7^6	9
7^7	3
7^8	1

Observamos que el patrón se repite cada 4 veces.
Luego, como 2024 es múltiplo de 4, el número 7^{2024} termina igual que 7^4 o 7^8, es decir, en 1.

Problema 9

Joaquín quiere escoger la ropa para su peluche Avocado. Avocado tiene 3 sombreros y 5 playeras. ¿De cuántas maneras Joaquín puede vestir a su peluche Avocado si debe usar una playera y un sombrero?

Solución

Notemos que por cada sombrero podemos hacer 5 atuendos diferentes, uno por cada playera. Como hay 3 sombreros, entonces Joaquín puede vestir a Avocado de:

$$3 \times 5 = 15$$

maneras distintas.

Problema 10

En una caja hay bolitas de tres colores: blancas, rojas y verdes. En total hay 315 bolitas. La cantidad total de bolitas verdes y bolitas rojas es igual al doble de la cantidad de bolitas blancas. Iván sacó 30 bolitas verdes y ahora, en la caja, hay la misma cantidad de bolitas verdes que de bolitas rojas. ¿Cuántas bolitas verdes había inicialmente?

Solución

Sean B, R y V el número de bolitas blancas, rojas y verdes iniciales, respectivamente. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} V + B + R = 315 \quad (1) \\ V + R = 2B \quad (2) \\ V - 30 = R \quad (3). \end{gathered}$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos:

$$3B = 315 \quad \Rightarrow \quad B = 105.$$

Por lo que:

$$V + R = 210, \quad V - 30 = R.$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$2V - 30 = 210 \quad \Rightarrow \quad 2V = 240 \quad \Rightarrow \quad V = 120.$$

Concluimos que inicialmente había 120 bolitas verdes.

Problema 11

Nuria tiene un cajón de calcetines muy desordenado. Tiene 5 calcetas azules, 3 calcetas rojas y una calceta café. Nuria juega un juego en el que saca calcetas, una por una, del cajón con los ojos vendados. Después de sacar alguna cantidad, se quita la venda. Ella gana si sacó dos calcetas del mismo color y pierde si no lo hizo. ¿Cuál es la mínima cantidad de calcetas debe sacar Nuria para asegurarse de siempre ganar su juego?

Solución

En el peor de los casos, Nuria podría sacar una calceta de cada color, es decir, una azul, una roja y una café; por lo tanto, si Nuria saca 4 calcetas, puede asegurar ganar el juego.

Problema 12

Berta hace una lista con todos los números de tres cifras que cumplen que la suma de sus dígitos es 8. Por ejemplo, el número 521 está en esa lista porque $5 + 2 + 1 = 8$. ¿Cuánto vale la suma del mayor y el menor número de esta lista?

Solución

El número mayor es 800 y el menor es 107.
Luego, la suma de ambos números es:

$$800 + 107 = 907.$$

Problema 13

Un entero positivo n tiene tres dígitos. El dígito de las centenas de n es igual a la suma de los dígitos de las unidades y las decenas. Además, si multiplicamos por 4 el dígito de las unidades de n se obtiene la suma de los dígitos de las centenas y las decenas. ¿Qué número es n?

Solución

Sean u, d, c los dígitos de las unidades, decenas y centenas, respectivamente. Se debe cumplir:

$$c = u + d$$
$$c + d = 4u.$$

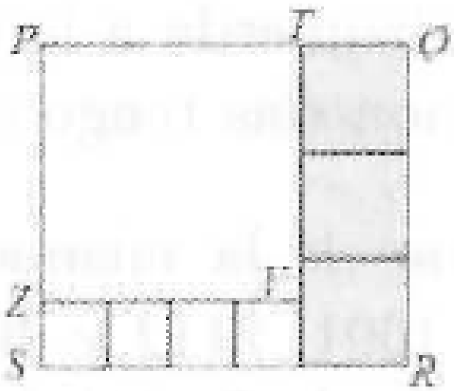
Las opciones para $c + d$ son: $4, 8, 12, 16$.

Si tomamos $c+d = 8$, de la segunda ecuación podemos deducir $u = 2$, y ocupando la primer ecuación obtenemos $c = 5$, $d = 3$. Por lo tanto:

$$n = 532.$$

Problema 14

Dividimos al cuadrado $PQRS$ en 7 cuadrados y el rectángulo $PTVZ$ como se muestra en la figura. El lado de cada cuadrado sombreado es 10 cm.
¿Cuál es el área del rectángulo $PTVZ$?

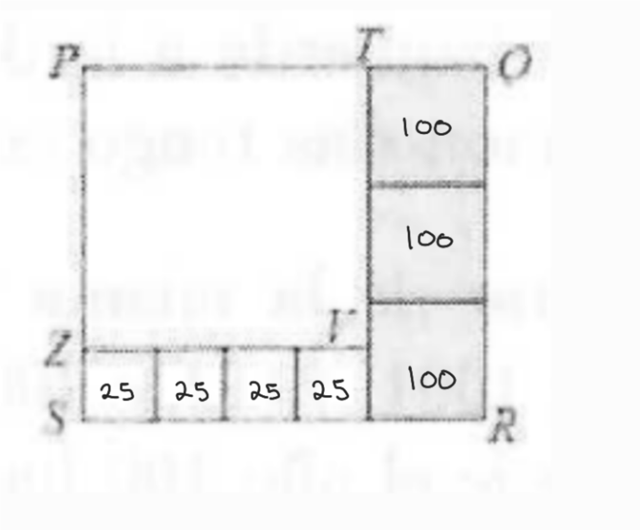


Solución

Notemos que el cuadrado $PQRS$ tiene 30 cm de lado, pues es el triple que el lado de un cuadrado sombreado.
Luego, los cuadrados más pequeños tienen 5 cm de lado.
Podemos obtener el área de $PTVZ$ calculando el área total del cuadrado $PQRS$ y restando las áreas sobrantes.

$$\text{Área}(PTVZ) = 900 - 3(100) - 4(25) = 500\,\text{cm}^2.$$

Por lo tanto, el área del rectángulo $PTVZ$ es $500\,\text{cm}^2$.



Problema 15

El número de alumnos en una escuela está entre 500 y 1000. Si se forman grupos de 3 o grupos de 5, cada alumno queda en un grupo. Si el número de alumnos en cada salón es igual al número de salones, **¿cuántos alumnos hay en la escuela?**

Solución

Sea n el número de alumnos en la escuela. El problema nos dice que n es múltiplo de 3 y 5, por lo que n es múltiplo de 15.

Además, si K es el número de salones, y el número de salones es igual al número de alumnos en cada salón, entonces:

$$n = K^2.$$

Es decir, n es un cuadrado perfecto. El único número cuadrado perfecto entre 500 y 1000 que es múltiplo de 15 es 900.

Por lo tanto, hay 900 alumnos en la escuela.

Examen 3 - Primero de secundaria

Problema 1

¿Cuál es el último dígito de la siguiente multiplicación?

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 2025$$

Solución

Notemos que cualquier número impar multiplicado por un múltiplo de 5 termina en 5.
Luego, el último dígito de dicha multiplicación es 5.

Problema 2

A un pedazo cuadrado de cartón se le recortan, de las 4 esquinas, 4 cuadrados de 2 cm de lado. Luego, el cartón se dobla para formar una caja de $180\,\text{cm}^2$ de superficie.
¿Cuál es el volumen de esta caja?

Solución

Sea x el lado del cartón cuadrado original. Luego, al recortar 2 cm de cada esquina, la base de la caja será:

$$\text{Base} = x - 4.$$

La altura de la caja es la longitud de los cuadrados recortados, es decir, 2 cm.

La superficie total de la caja está dada por la suma del área de la base y el área de las 4 paredes laterales:

$$\text{Superficie} = \text{Área de la base} + \text{Área de las paredes laterales}.$$

La superficie total es $180\,\text{cm}^2$, por lo que podemos expresar:

$$\text{Superficie} = (x-4)^2 + 4 \cdot 2(x-4) = 180.$$

Simplificamos:

$$(x-4)^2 + 8(x-4) = 180.$$

Sea $y = x - 4$, entonces:

$$y^2 + 8y - 180 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(-180)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{784}}{2}.$$

$$y = \frac{-8+28}{2} = 10 \quad \text{(porque el lado debe ser positivo).}$$

Entonces:

$$x - 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 14.$$

El lado de la base es:

$$x - 4 = 10\,\text{cm}, \quad \text{y la altura es } 2\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, el volumen de la caja es:

$$\text{Volumen} = \text{Base} \times \text{Base} \times \text{Altura} = 10 \cdot 10 \cdot 2 = 200\,\text{cm}^3.$$

Por lo que concluimos que el volumen de la caja es $200\,\text{cm}^3$.

Problema 3

Tengo cierto número de monedas, algunas en la mano derecha y otras en la izquierda. Si pasara una moneda de la mano derecha a la izquierda, tendría igual número de monedas en cada mano. Si en lugar de ello pasara una moneda de la izquierda a la derecha, tendría en la mano izquierda la mitad de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tengo en total?

Solución

Sea D e I las monedas en la mano derecha e izquierda, respectivamente. Se cumple lo siguiente:

$$D - 1 = I + 1$$
$$D + 1 = 2(I - 1).$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$-2 = -I + 3.$$

Resolviendo, obtenemos:

$$I = 5, \quad D = 7.$$

Solución alternativa

Sean D e I las monedas en la mano derecha e izquierda, respectivamente. La primera ecuación implica que hay 2 monedas más en la mano derecha que en la izquierda.

Podemos probar varias parejas de valores para ver si se cumple que, al pasar una moneda de la izquierda a la derecha, en la derecha se tiene el doble de monedas que en la izquierda. La tabla a continuación muestra este análisis:

D	I	$D+1$	$I-1$	Cumple
5	3	6	2	No
6	4	7	3	No
7	5	8	4	Sí

Por lo tanto, obtenemos $I = 5$ y $D = 7$.

Problema 4

Hay algunos números que pueden leerse de la misma forma de izquierda a derecha que de derecha a izquierda; por ejemplo, los números 1001, 2112 y 4002004. A estos números les llamamos *capicúa*. ¿Cuántos años capicúa han habido desde el año 100 hasta el año actual? Recuerda que estamos en el año 2024.

Solución

Para los números de 3 cifras del 100 al 999, se puede hacer lo siguiente: Para las centenas podemos poner cualquiera del 1 al 9. Como el número debe ser capicúa, este dígito debe ser el mismo que las unidades. Para las decenas, podemos poner cualquier dígito del 0 al 9.
Por lo tanto, hay:

$$9 \times 10 = 90 \text{ capicúas de 3 dígitos.}$$

Ahora, del 1000 al 1999, solo podemos formar 10 capicúas:

$$\{1001, 1111, 1221, \ldots, 1991\}.$$

Finalmente, del 2000 al 2024, solo el 2002 es capicúa.

Por lo tanto, el total de capicúas es:

$$90 + 10 + 1 = 101.$$

Problema 5

Ximena comienza a contar desde un determinado número, el cual dice (en voz alta); no dice los dos números siguientes, dice en voz alta el número que sigue y vuelve a brincarse los dos siguientes. Continúa de esta manera hasta pronunciar el séptimo número que fue el 53. ¿En qué número inició el conteo?

Solución

Notemos que Ximena dice en voz alta cada 3 números, por lo que, si vamos al revés, tenemos la siguiente sucesión:

$$53, 50, 47, 44, 41, 38, 35$$

Por lo que el número en que empezó a contar fue 35.

Problema 6

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números que va

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Si Toscano conoce los primeros 2024 términos de la secuencia, ¿cuántos de esos términos son impares?

Solución

Se debe notar que cada tercer término de la sucesión de Fibonacci es par. Esto se debe a las siguientes propiedades:

$$\text{impar} + \text{impar} = \text{par}, \quad \text{impar} + \text{par} = \text{impar}.$$

Por lo tanto, si dividimos 2024 entre 3, obtenemos que:

$$\frac{2024}{3} = 674$$

términos son pares. Por lo tanto, el resto de los términos son impares:

$$2024 - 674 = 1350.$$

Así, hay 1350 términos impares en la sucesión de Fibonacci hasta el término 2024.

Problema 7

Sebas sale en carretera rumbo a Oaxtepec para presentar un examen de matemáticas. Él va a 80 km/h durante media hora, luego, cambia de velocidad a 20 km/h durante 90 minutos porque había tráfico y finalmente tiene una velocidad de 100 km/h durante 20 minutos. ¿Cuánta distancia ha recorrido?

Solución

Multiplicamos la velocidad por el tiempo recorrido en horas y obtenemos:

$$\text{Distancia} = 80\left(\frac{1}{2}\right) + 20\left(\frac{3}{2}\right) + 100\left(\frac{1}{3}\right)$$

Simplificando:

$$\text{Distancia} = 40 + 30 + 33{,}333 \approx 103{,}333\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es aproximadamente 103,333 km.

Problema 8

Diego se encuentra multiplicando números por diversión. Él toma un mismo número y lo multiplica por sí mismo varias veces. Por ejemplo, si tomara el tres y lo multiplicara por sí mismo 4 veces obtendría

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

Diego ha tomado el número 7 y lo ha multiplicado por sí mismo 2024 veces. ¿Cuál es el dígito de las unidades del resultado de esta multiplicación?

Solución

Al multiplicar un número por sí mismo k veces, siempre se genera un patrón en el dígito de las unidades. Notemos cuál es el patrón que se genera para el 7:

Número	Dígito de las unidades
7^1	7
7^2	9
7^3	3
7^4	1
7^5	7
7^6	9
7^7	3
7^8	1

Observamos que el patrón se repite cada 4 veces.
Luego, como 2024 es múltiplo de 4, el número 7^{2024} termina igual que 7^4 o 7^8, es decir, en 1.

Problema 9

Joaquín quiere escoger la ropa para su peluche Avocado. Avocado tiene 3 sombreros y 5 playeras. ¿De cuántas maneras Joaquín puede vestir a su peluche Avocado si debe usar una playera y un sombrero?

Solución

Notemos que por cada sombrero podemos hacer 5 atuendos diferentes, uno por cada playera. Como hay 3 sombreros, entonces Joaquín puede vestir a Avocado de:

$$3 \times 5 = 15$$

maneras distintas.

Problema 10

En una caja hay bolitas de tres colores: blancas, rojas y verdes. En total hay 315 bolitas. La cantidad total de bolitas verdes y bolitas rojas es igual al doble de la cantidad de bolitas blancas. Iván sacó 30 bolitas verdes y ahora, en la caja, hay la misma cantidad de bolitas verdes que de bolitas rojas. ¿Cuántas bolitas verdes había inicialmente?

Solución

Sean B, R y V el número de bolitas blancas, rojas y verdes iniciales, respectivamente. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} V + B + R &= 315 \quad (1) \\ V + R &= 2B \quad (2) \\ V - 30 &= R \quad (3). \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos:

$$3B = 315 \quad \Rightarrow \quad B = 105.$$

Por lo que:

$$V + R = 210, \quad V - 30 = R.$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$2V - 30 = 210 \quad \Rightarrow \quad 2V = 240 \quad \Rightarrow \quad V = 120.$$

Concluimos que inicialmente había 120 bolitas verdes.

Problema 11

Nuria tiene un cajón de calcetines muy desordenado. Tiene 5 calcetas azules, 3 calcetas rojas y una calceta café. Nuria juega un juego en el que saca calcetas, una por una, del cajón con los ojos vendados. Después de sacar alguna cantidad, se quita la venda. Ella gana si sacó dos calcetas del mismo color y pierde si no lo hizo. ¿Cuál es la mínima cantidad de calcetas debe sacar Nuria para asegurarse de siempre ganar su juego?

Solución

En el peor de los casos, Nuria podría sacar una calceta de cada color, es decir, una azul, una roja y una café; por lo tanto, si Nuria saca 4 calcetas, puede asegurar ganar el juego.

Problema 12

Berta hace una lista con todos los números de tres cifras que cumplen que la suma de sus dígitos es 8. Por ejemplo, el número 521 está en esa lista porque $5 + 2 + 1 = 8$. ¿Cuánto vale la suma del mayor y el menor número de esta lista?

Solución

El número mayor es 800 y el menor es 107.
Luego, la suma de ambos números es:

$$800 + 107 = 907.$$

Problema 13

Un entero positivo n tiene tres dígitos. El dígito de las centenas de n es igual a la suma de los dígitos de las unidades y las decenas. Además, si multiplicamos por 4 el dígito de las unidades de n se obtiene la suma de los dígitos de las centenas y las decenas. ¿Qué número es n?

Solución

Sean u, d, c los dígitos de las unidades, decenas y centenas, respectivamente. Se debe cumplir:

$$c = u + d$$
$$c + d = 4u.$$

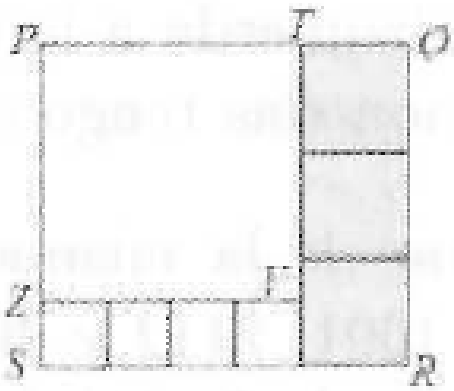
Las opciones para $c + d$ son: $4, 8, 12, 16$.

Si tomamos $c+d = 8$, de la segunda ecuación podemos deducir $u = 2$, y ocupando la primer ecuación obtenemos $c = 5$, $d = 3$. Por lo tanto:

$$n = 532.$$

Problema 14

Dividimos al cuadrado $PQRS$ en 7 cuadrados y el rectángulo $PTVZ$ como se muestra en la figura. El lado de cada cuadrado sombreado es 10 cm.
¿Cuál es el área del rectángulo $PTVZ$?

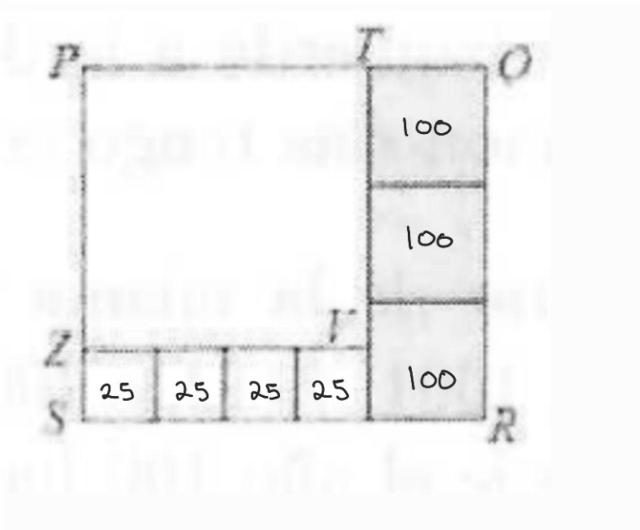


Solución

Notemos que el cuadrado $PQRS$ tiene 30 cm de lado, pues es el triple que el lado de un cuadrado sombreado. Luego, los cuadrados más pequeños tienen 5 cm de lado.
Podemos obtener el área de $PTVZ$ calculando el área total del cuadrado $PQRS$ y restando las áreas sobrantes.

$$\text{Área}(PTVZ) = 900 - 3(100) - 4(25) = 500\,\text{cm}^2.$$

Por lo tanto, el área del rectángulo $PTVZ$ es $500\,\text{cm}^2$.



Problema 15

El número de alumnos en una escuela está entre 500 y 1000. Si se forman grupos de 3 o grupos de 5, cada alumno queda en un grupo. Si el número de alumnos en cada salón es igual al número de salones, **¿cuántos alumnos hay en la escuela?**

Solución

Sea n el número de alumnos en la escuela. El problema nos dice que n es múltiplo de 3 y 5, por lo que n es múltiplo de 15.

Además, si K es el número de salones, y el número de salones es igual al número de alumnos en cada salón, entonces:

$$n = K^2.$$

Es decir, n es un cuadrado perfecto. El único número cuadrado perfecto entre 500 y 1000 que es múltiplo de 15 es 900.

Por lo tanto, hay 900 alumnos en la escuela.

Examen 4 - Segundo de secundaria

Problema 1

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números que va

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Si Toscano conoce los primeros 2024 términos de la secuencia, ¿cuántos de esos términos son impares?

Solución

Se debe notar que cada tercer término de la sucesión de Fibonacci es par. Esto se debe a las siguientes propiedades:

$$\text{impar} + \text{impar} = \text{par}, \quad \text{impar} + \text{par} = \text{impar}.$$

Por lo tanto, si dividimos 2024 entre 3, obtenemos que:

$$\frac{2024}{3} = 674$$

términos son pares. Por lo tanto, el resto de los términos son impares:

$$2024 - 674 = 1350.$$

Así, hay 1350 términos impares en la sucesión de Fibonacci hasta el término 2024.

Problema 2

Sebas sale en carretera rumbo a Oaxtepec para presentar un examen de matemáticas. Él va a 80 km/h durante media hora, luego, cambia de velocidad a 20 km/h durante 90 minutos porque había tráfico y finalmente tiene una velocidad de 100 km/h durante 20 minutos. ¿Cuánta distancia ha recorrido?

Solución

Multiplicamos la velocidad por el tiempo recorrido en horas y obtenemos:

$$\text{Distancia} = 80\left(\frac{1}{2}\right) + 20\left(\frac{3}{2}\right) + 100\left(\frac{1}{3}\right)$$

Simplificando:

$$\text{Distancia} = 40 + 30 + 33{,}333 \approx 103{,}333\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es aproximadamente 103,333 km.

Problema 3

Diego se encuentra multiplicando números por diversión. Él toma un mismo número y lo multiplica por sí mismo varias veces. Por ejemplo, si tomara el tres y lo multiplicara por sí mismo 4 veces obtendría

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

Diego ha tomado el número 7 y lo ha multiplicado por sí mismo 2024 veces. ¿Cuál es el dígito de las unidades del resultado de esta multiplicación?

Solución

Al multiplicar un número por sí mismo k veces, siempre se genera un patrón en el dígito de las unidades. Notemos cuál es el patrón que se genera para el 7:

Número	Dígito de las unidades
7^1	7
7^2	9
7^3	3
7^4	1
7^5	7
7^6	9
7^7	3
7^8	1

Observamos que el patrón se repite cada 4 veces.
Luego, como 2024 es múltiplo de 4, el número 7^{2024} termina igual que 7^4 o 7^8, es decir, en 1.

Problema 4

Joaquín quiere escoger la ropa para su peluche Avocado. Avocado tiene 3 sombreros y 5 playeras. ¿De cuántas maneras Joaquín puede vestir a su peluche Avocado si debe usar una playera y un sombrero?

Solución

Notemos que por cada sombrero podemos hacer 5 atuendos diferentes, uno por cada playera. Como hay 3 sombreros, entonces Joaquín puede vestir a Avocado de:

$$3 \times 5 = 15$$

maneras distintas.

Problema 5

En una caja hay bolitas de tres colores: blancas, rojas y verdes. En total hay 315 bolitas. La cantidad total de bolitas verdes y bolitas rojas es igual al doble de la cantidad de bolitas blancas. Iván sacó 30 bolitas verdes y ahora, en la caja, hay la misma cantidad de bolitas verdes que de bolitas rojas. ¿Cuántas bolitas verdes había inicialmente?

Solución

Sean B, R y V el número de bolitas blancas, rojas y verdes iniciales, respectivamente. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V + B + R = 315 \quad (1)$$
$$V + R = 2B \quad (2)$$
$$V - 30 = R \quad (3).$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos:

$$3B = 315 \quad \Rightarrow \quad B = 105.$$

Por lo que:

$$V + R = 210, \quad V - 30 = R.$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$2V - 30 = 210 \quad \Rightarrow \quad 2V = 240 \quad \Rightarrow \quad V = 120.$$

Concluimos que inicialmente había 120 bolitas verdes.

Problema 6

Nuria tiene un cajón de calcetines muy desordenado. Tiene 5 calcetas azules, 3 calcetas rojas y una calceta café. Nuria juega un juego en el que saca calcetas, una por una, del cajón con los ojos vendados. Después de sacar alguna cantidad, se quita la venda. Ella gana si sacó dos calcetas del mismo color y pierde si no lo hizo. ¿Cuál es la mínima cantidad de calcetas debe sacar Nuria para asegurarse de siempre ganar su juego?

Solución

En el peor de los casos, Nuria podría sacar una calceta de cada color, es decir, una azul, una roja y una café; por lo tanto, si Nuria saca 4 calcetas, puede asegurar ganar el juego.

Problema 7

Berta hace una lista con todos los números de tres cifras que cumplen que la suma de sus dígitos es 8. Por ejemplo, el número 521 está en esa lista porque $5 + 2 + 1 = 8$. ¿Cuánto vale la suma del mayor y el menor número de esta lista?

Solución

El número mayor es 800 y el menor es 107.
Luego, la suma de ambos números es:

$$800 + 107 = 907.$$

Problema 8

Un entero positivo n tiene tres dígitos. El dígito de las centenas de n es igual a la suma de los dígitos de las unidades y las decenas. Además, si multiplicamos por 4 el dígito de las unidades de n se obtiene la suma de los dígitos de las centenas y las decenas. ¿Qué número es n?

Solución

Sean u, d, c los dígitos de las unidades, decenas y centenas, respectivamente. Se debe cumplir:

$$c = u + d$$
$$c + d = 4u.$$

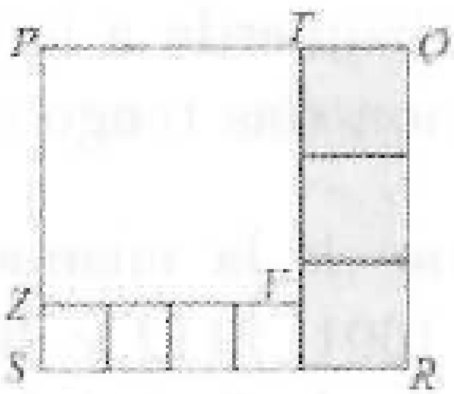
Las opciones para $c + d$ son: $4, 8, 12, 16$.

Si tomamos $c+d = 8$, de la segunda ecuación podemos deducir $u = 2$, y ocupando la primer ecuación obtenemos $c = 5$, $d = 3$. Por lo tanto:

$$n = 532.$$

Problema 9

Dividimos al cuadrado $PQRS$ en 7 cuadrados y el rectángulo $PTVZ$ como se muestra en la figura. El lado de cada cuadrado sombreado es 10 cm.
¿Cuál es el área del rectángulo $PTVZ$?

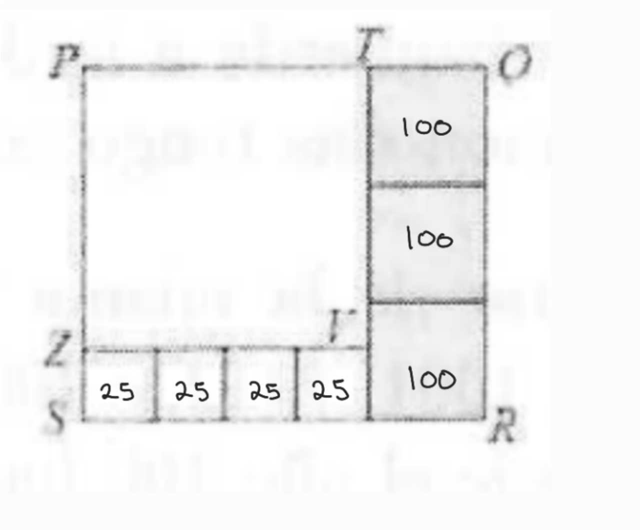


Solución

Notemos que el cuadrado $PQRS$ tiene 30 cm de lado, pues es el triple que el lado de un cuadrado sombreado. Luego, los cuadrados más pequeños tienen 5 cm de lado.
Podemos obtener el área de $PTVZ$ calculando el área total del cuadrado $PQRS$ y restando las áreas sobrantes.

$$\text{Área}(PTVZ) = 900 - 3(100) - 4(25) = 500\,\text{cm}^2.$$

Por lo tanto, el área del rectángulo $PTVZ$ es $500\,\text{cm}^2$.



Problema 10

El número de alumnos en una escuela está entre 500 y 1000. Si se forman grupos de 3 o grupos de 5, cada alumno queda en un grupo. Si el número de alumnos en cada salón es igual al número de salones, **¿cuántos alumnos hay en la escuela?**

Solución

Sea n el número de alumnos en la escuela. El problema nos dice que n es múltiplo de 3 y 5, por lo que n es múltiplo de 15.

Además, si K es el número de salones, y el número de salones es igual al número de alumnos en cada salón, entonces:

$$n = K^2.$$

Es decir, n es un cuadrado perfecto. El único número cuadrado perfecto entre 500 y 1000 que es múltiplo de 15 es 900.

Por lo tanto, hay 900 alumnos en la escuela.

Problema 11

Al dividir el número 203 entre cierto número entero positivo m, se obtuvo como residuo 13. Al dividir el número 298 entre el mismo número m, se obtuvo nuevamente residuo 13. **¿Cuál es el máximo valor posible de m?**

Solución

Notemos que la diferencia entre 298 y 203 debe ser un múltiplo de m, pues ambos dejan el mismo residuo al dividirse entre m. Por lo tanto, m divide a 95 (donde $95 = 298 - 203$).
Los divisores de 95 son:

$$m \in \{1, 5, 19, 95\}.$$

Por lo tanto, el valor máximo posible de m es:

$$m = 95.$$

Problema 12

Un cuadrado tiene 2 diagonales, un pentágono tiene 5. **¿Cuántos lados tiene un polígono de 20 diagonales?**

Solución

El número de diagonales de un polígono de n lados está dado por la fórmula:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n.$$

Esta fórmula se obtiene al contar el número de maneras de seleccionar 2 vértices (para formar una línea) y luego restar el número de lados del polígono, ya que estos no son diagonales.
Dado que el problema nos dice que el número de diagonales es 20, planteamos la siguiente ecuación:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = 20.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que:

$$n = 8.$$

Por lo tanto, el polígono tiene 8 lados.

Problema 13

Joshua ha escrito 100 números en el pizarrón. Ander, que es muy rápido para hacer cálculos matemáticos, le dijo que el promedio de los números que escribió era 86. Joshua borró entonces 20 números del pizarrón. A lo que Ander respondió diciendo que el promedio de los números que quedaban era 84. **¿Cuál es el promedio de los números que borró Joshua?**

Solución

Sea S_{100} la suma de los primeros 100 números, S_{80} la suma de los 80 números restantes, y S_{20} la suma de los 20 números que borró Joshua. Notemos que:

$$\frac{S_{100}}{100} = 86, \quad \frac{S_{80}}{80} = 84$$

$$S_{100} = 8600, \quad S_{80} = 6720$$

Por lo tanto:

$$S_{20} = S_{100} - S_{80} = 8600 - 6720 = 1880$$

Finalmente, el promedio de los 20 números que borró Joshua es:

$$\frac{S_{20}}{20} = \frac{1880}{20} = 94$$

Así, el promedio de los números que borró Joshua es 94.

Problema 14

¿Cuántos números de tres cifras hay que cumplan que la multiplicación de sus cifras es un número par? **Nota:** El 0 es un número par.

Solución:

Notemos que es suficiente con que alguna de las cifras sea un número par, para que el producto sea un número par.

Hay tres casos:

1. Las tres cifras son pares.
2. Dos de las cifras son pares.
3. Una de las cifras es par.

Caso 1

Hay 4 opciones para la cifra de las centenas: $2, 4, 6, 8$. Además, hay 5 opciones para la cifra de las decenas pues en este caso podemos ocupar el 0 y lo mismo para la cifra de las unidades. Por lo tanto, obtenemos:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

Caso 2

Como en este caso dos de las cifras son pares, cada número solo depende de donde colocamos la cifra impar

1) Si ponemos el impar en las centenas, hay:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{números.}$$

2) Si ponemos el impar en las decenas, hay:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

3) Si ponemos el impar en las unidades, hay:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

Observación: El 4 sale de que no es posible poner el 0 en la primera posición.

Caso 3

1) Si ponemos el par en las centenas, hay:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

2) Mientras que si lo ponemos en las decenas o unidades, hay para cada caso:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{números.}$$

Total

En total, hay:

$$100 + 125 + 100 + 100 + 100 + 125 + 125 = 775 \quad \text{números que cumplen.}$$

Solución alternativa:

Notemos que para que el producto sea par, al menos un dígito debe ser par. Hay 900 números entre el 100 y el 999. Los números que no cumplen son aquellos que tienen **todos sus dígitos impares**.
Hay:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{números con todos sus dígitos impares.}$$

Por lo tanto, el total de números que cumplen es:

$$900 - 125 = 775 \quad \text{números.}$$

Problema 15

Susana escribió en un papel todos los números que son múltiplos de 5 y que son mayores a 201 y menores a 299. Luego recortó cada dígito por separado, obteniendo muchísimos papelitos (todos con sólo un dígito). **¿Cuánto vale la suma de todos los números en los papelitos?**

Solución

Los números que escribió Susana son:

$$205, 210, 215, \ldots, 290, 295.$$

Después de recortarlos y acomodarlos según la cifra de las unidades, decenas y centenas, quedarían las siguientes listas de números:

$$5, 0, 5, 0, \ldots, 0, 5, 0, 5,$$

$$0, 1, 1, 2, \ldots, 8, 8, 9, 9,$$

$$2, 2, 2, 2, \ldots, 2, 2, 2, 2.$$

Donde cada lista contiene 19 números. La suma de cada lista es:

$$50, \quad 90, \quad 38 \quad \text{respectivamente.}$$

Así, la suma de todos los papelitos sería:

$$50 + 90 + 38 = 178.$$

Examen 5 - Tercero de secundaria

Problema 1

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números que va

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores. Si Toscano conoce los primeros 2024 términos de la secuencia, ¿cuántos de esos términos son impares?

Solución

Se debe notar que cada tercer término de la sucesión de Fibonacci es par. Esto se debe a las siguientes propiedades:

$$\text{impar} + \text{impar} = \text{par}, \quad \text{impar} + \text{par} = \text{impar}.$$

Por lo tanto, si dividimos 2024 entre 3, obtenemos que:

$$\frac{2024}{3} = 674$$

términos son pares. Por lo tanto, el resto de los términos son impares:

$$2024 - 674 = 1350.$$

Así, hay 1350 términos impares en la sucesión de Fibonacci hasta el término 2024.

Problema 2

Joaquín quiere escoger la ropa para su peluche Avocado. Avocado tiene 3 sombreros y 5 playeras. ¿De cuántas maneras Joaquín puede vestir a su peluche Avocado si debe usar una playera y un sombrero?

Solución

Notemos que por cada sombrero podemos hacer 5 atuendos diferentes, uno por cada playera. Como hay 3 sombreros, entonces Joaquín puede vestir a Avocado de:

$$3 \times 5 = 15$$

maneras distintas.

Problema 3

Nuria tiene un cajón de calcetines muy desordenado. Tiene 5 calcetas azules, 3 calcetas rojas y una calceta café. Nuria juega un juego en el que saca calcetas, una por una, del cajón con los ojos vendados. Después de sacar alguna cantidad, se quita la venda. Ella gana si sacó dos calcetas del mismo color y pierde si no lo hizo. ¿Cuál es la mínima cantidad de calcetas que debe sacar Nuria para asegurarse de siempre ganar su juego?

Solución

En el peor de los casos, Nuria podría sacar una calceta de cada color, es decir, una azul, una roja y una café; por lo tanto, si Nuria saca 4 calcetas, puede asegurar ganar el juego.

Problema 4

Berta hace una lista con todos los números de tres cifras que cumplen que la suma de sus dígitos es 8. Por ejemplo, el número 521 está en esa lista porque $5 + 2 + 1 = 8$. ¿Cuánto vale la suma del mayor y el menor número de esta lista?

Solución

El número mayor es 800 y el menor es 107.
Luego, la suma de ambos números es:

$$800 + 107 = 907.$$

Problema 5

Un entero positivo n tiene tres dígitos. El dígito de las centenas de n es igual a la suma de los dígitos de las unidades y las decenas. Además, si multiplicamos por 4 el dígito de las unidades de n se obtiene la suma de los dígitos de las centenas y las decenas. ¿Qué número es n?

Solución

Sean u, d, c los dígitos de las unidades, decenas y centenas, respectivamente. Se debe cumplir:

$$c = u + d$$

$$c + d = 4u.$$

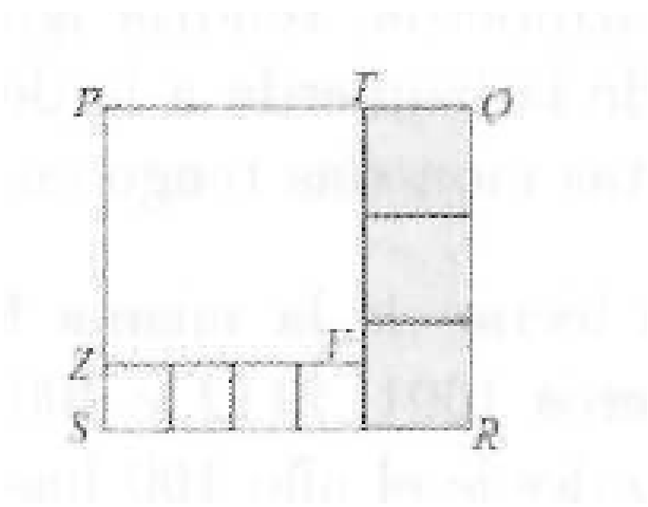
Las opciones para $c + d$ son: $4, 8, 12, 16$.

Si tomamos $c+d = 8$, de la segunda ecuación podemos deducir $u = 2$, y ocupando la primer ecuación obtenemos $c = 5$, $d = 3$. Por lo tanto:

$$n = 532.$$

Problema 6

Dividimos al cuadrado $PQRS$ en 7 cuadrados y el rectángulo $PTVZ$ como se muestra en la figura. El lado de cada cuadrado sombreado es 10 cm.
¿Cuál es el área del rectángulo $PTVZ$?

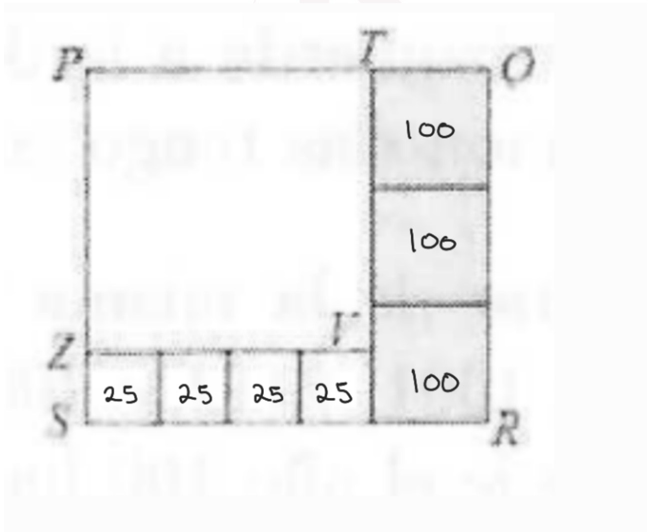


Solución

Notemos que el cuadrado $PQRS$ tiene 30 cm de lado, pues es el triple que el lado de un cuadrado sombreado. Luego, los cuadrados más pequeños tienen 5 cm de lado.
Podemos obtener el área de $PTVZ$ calculando el área total del cuadrado $PQRS$ y restando las áreas sobrantes.

$$\text{Área}(PTVZ) = 900 - 3(100) - 4(25) = 500\,\text{cm}^2.$$

Por lo tanto, el área del rectángulo $PTVZ$ es $500\,\text{cm}^2$.



Problema 7

El número de alumnos en una escuela está entre 500 y 1000. Si se forman grupos de 3 o grupos de 5, cada alumno queda en un grupo. Si el número de alumnos en cada salón es igual al número de salones, **¿cuántos alumnos hay en la escuela?**

Solución

Sea n el número de alumnos en la escuela. El problema nos dice que n es múltiplo de 3 y 5, por lo que n es múltiplo de 15.

Además, si K es el número de salones, y el número de salones es igual al número de alumnos en cada salón, entonces:

$$n = K^2.$$

Es decir, n es un cuadrado perfecto. El único número cuadrado perfecto entre 500 y 1000 que es múltiplo de 15 es 900.

Por lo tanto, hay 900 alumnos en la escuela.

Problema 8

Al dividir el número 203 entre cierto número entero positivo m, se obtuvo como residuo 13. Al dividir el número 298 entre el mismo número m, se obtuvo nuevamente residuo 13. **¿Cuál es el máximo valor posible de m?**

Solución

Notemos que la diferencia entre 298 y 203 debe ser un múltiplo de m, pues ambos dejan el mismo residuo al dividirse entre m. Por lo tanto, m divide a 95 (donde $95 = 298 - 203$).
Los divisores de 95 son:

$$m \in \{1, 5, 19, 95\}.$$

Por lo tanto, el valor máximo posible de m es:

$$m = 95.$$

Problema 9

Un cuadrado tiene 2 diagonales, un pentágono tiene 5. **¿Cuántos lados tiene un polígono de 20 diagonales?**

Solución

El número de diagonales de un polígono de n lados está dado por la fórmula:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n.$$

Esta fórmula se obtiene al contar el número de maneras de seleccionar 2 vértices (para formar una línea) y luego restar el número de lados del polígono, ya que estos no son diagonales.
Dado que el problema nos dice que el número de diagonales es 20, planteamos la siguiente ecuación:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = 20.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que:

$$n = 8.$$

Por lo tanto, el polígono tiene 8 lados.

Problema 10

Joshua ha escrito 100 números en el pizarrón. Ander, que es muy rápido para hacer cálculos matemáticos, le dijo que el promedio de los números que escribió era 86. Joshua borró entonces 20 números del pizarrón. A lo que Ander respondió diciendo que el promedio de los números que quedaban era 84. **¿Cuál es el promedio de los números que borró Joshua?**

Solución

Sea S_{100} la suma de los primeros 100 números, S_{80} la suma de los 80 números restantes, y S_{20} la suma de los 20 números que borró Joshua. Notemos que:

$$\frac{S_{100}}{100} = 86, \quad \frac{S_{80}}{80} = 84$$

$$S_{100} = 8600, \quad S_{80} = 6720$$

Por lo tanto:

$$S_{20} = S_{100} - S_{80} = 8600 - 6720 = 1880$$

Finalmente, el promedio de los 20 números que borró Joshua es:

$$\frac{S_{20}}{20} = \frac{1880}{20} = 94$$

Así, el promedio de los números que borró Joshua es 94.

Problema 11

¿Cuántos números de tres cifras hay que cumplan que la multiplicación de sus cifras es un número par? **Nota:** El 0 es un número par.

Solución:

Notemos que es suficiente con que alguna de las cifras sea un número par, para que el producto sea un número par.

Hay tres casos:

1. Las tres cifras son pares.
2. Dos de las cifras son pares.
3. Una de las cifras es par.

Caso 1

Hay 4 opciones para la cifra de las centenas: $2, 4, 6, 8$. Además, hay 5 opciones para la cifra de las decenas pues en este caso podemos ocupar el 0 y lo mismo para la cifra de las unidades. Por lo tanto, obtenemos:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

Caso 2

Como en este caso dos de las cifras son pares, cada número solo depende de donde colocamos la cifra impar

1) Si ponemos el impar en las centenas, hay:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{números.}$$

2) Si ponemos el impar en las decenas, hay:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

3) Si ponemos el impar en las unidades, hay:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

Observación: El 4 sale de que no es posible poner el 0 en la primera posición.

Caso 3

1) Si ponemos el par en las centenas, hay:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad \text{números.}$$

2) Mientras que si lo ponemos en las decenas o unidades, hay para cada caso:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{números.}$$

Total

En total, hay:

$$100 + 125 + 100 + 100 + 100 + 125 + 125 = 775 \quad \text{números que cumplen.}$$

Solución alternativa:

Notemos que para que el producto sea par, al menos un dígito debe ser par. Hay 900 números entre el 100 y el 999. Los números que no cumplen son aquellos que tienen **todos sus dígitos impares**.
Hay:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{números con todos sus dígitos impares.}$$

Por lo tanto, el total de números que cumplen es:

$$900 - 125 = 775 \quad \text{números.}$$

Problema 12

Susana escribió en un papel todos los números que son múltiplos de 5 y que son mayores a 201 y menores a 299. Luego recortó cada dígito por separado, obteniendo muchísimos papelitos (todos con sólo un dígito). **¿Cuánto vale la suma de todos los números en los papelitos?**

Solución

Los números que escribió Susana son:

$$205, 210, 215, \ldots, 290, 295.$$

Después de recortarlos y acomodarlos según la cifra de las unidades, decenas y centenas, quedarían las siguientes listas de números:

$$5, 0, 5, 0, \ldots, 0, 5, 0, 5,$$

$$0, 1, 1, 2, \ldots, 8, 8, 9, 9,$$

$$2, 2, 2, 2, \ldots, 2, 2, 2, 2.$$

Donde cada lista contiene 19 números. La suma de cada lista es:

$$50, \quad 90, \quad 38 \quad \text{respectivamente.}$$

Así, la suma de todos los papelitos sería:

$$50 + 90 + 38 = 178.$$

Problema 13

Mateo escribe todos los números que cumplen estas tres condiciones:

- Son mayores que 209 y menores que 2019.
- Tienen la cifra de la centena igual a la cifra de la decena.
- Son múltiplos de 3.

¿Cuántos números escribe Mateo?

Solución

Para resolver el problema, analizamos los números que cumplen las condiciones dadas en tres rangos: de 209 a 999, de 1000 a 1999, y de 2000 a 2019.

Para los números del 209 al 999 se debe tener que la cifra de las centenas y la cifra de las decenas deben ser iguales, si fijamos el dígito de las centenas, tenemos 4 opciones para formar números si dicho dígito es múltiplo de 3 y 3 opciones si no lo es. Por ejemplo, si fijamos el 9 podemos formar los números, 990, 993, 996, 999 . Mientras que, si el 2 es el número que fijamos, obtenemos: 222, 225, 228.

Por lo tanto, hay:

$$3(4) + 5(3) = 27 \quad \text{números en este caso.}$$

Para los números del 1000 al 1999, pasa algo similar. Se forman 4 números cuando fijamos los dígitos 1, 4, 7 en las centenas y 3 números si fijamos los dígitos $0, 2, 3, 5, 6, 8, 9$; por ejemplo, si fijamos el 4 obtenemos los números $1440, 1443, 1446, 1449$, mientras que si fijamos el 0 obtenemos los números $1002, 1005, 1008$.

Por lo tanto, hay:

$$3(4) + 7(3) = 33 \quad \text{números en este caso.}$$

Luego, para los números del 2000 al 2019, solo cumplen 2001, 2004, y 2007. Por lo tanto, hay 3 números más.

Conclusión: Mateo escribe:

$$27 + 33 + 3 = 63 \quad \text{números.}$$

Problema 14

Adán viaja de A hacia B, ciudades conectadas por una carretera recta y, por la misma ruta pero en sentido opuesto, Mauro viaja de B hacia A. Salen a la misma hora, cada uno a su propia velocidad durante todo el camino. Cuando se cruzan, la distancia recorrida por Adán es igual a la distancia recorrida por Mauro más $\frac{1}{7}$ de la distancia entre A y B. Desde que se cruzan hasta llegar a B, Adán tardó 9 minutos. Calcular cuánto tiempo utilizó Mauro para ir desde B hasta A.

Solución

Sea x la distancia recorrida por Mauro al cruzarse, y la distancia recorrida por Adán, y z la distancia total entre A y B. Se tiene lo siguiente:

$$x + y = z,$$
$$y = x + \frac{1}{7}z.$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$x = \frac{6}{7}z - x.$$

Sumando x a ambos lados:

$$2x = \frac{6}{7}z,$$

lo que implica:

$$x = \frac{6}{14}z.$$

Por lo tanto:

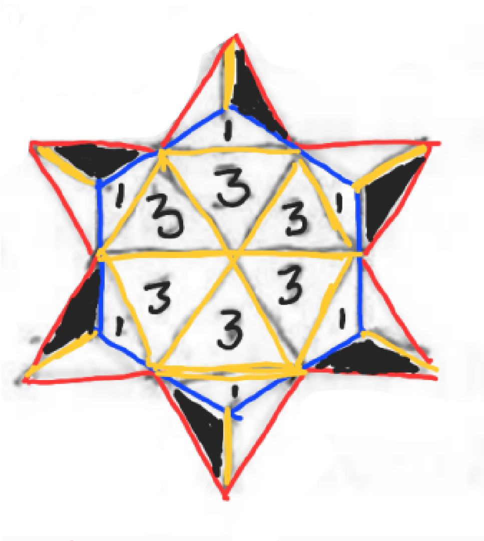
$$y = \frac{8}{14}z,$$

es decir, Adán había recorrido $\frac{8}{14}$ de la pista al momento de cruzarse, y recorrió $\frac{6}{14}$ en 9 minutos. Esto implica que recorre $\frac{8}{14}$ en 12 minutos.
Ese es el tiempo que tardan Adán y Mauro en encontrarse. Como Mauro llevaba $\frac{6}{14}$ en esos 12 minutos, significa que tarda 2 minutos por cada $\frac{6}{14}$ recorrido, por lo que para completar la pista tardará 28 minutos.

Problema 15

La siguiente figura muestra un hexágono regular dentro de una estrella regular de 6 picos. El hexágono tiene un área de $12\,\mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es el área de la estrella?

Solución



Podemos partir la figura de la siguiente manera: el número al interior nos dice cuántos triángulos como el que aparece sombreado se necesitan para completar dicha pieza. Podemos ver que para la estrella completa se necesitan 36 triángulos, mientras que para el hexágono original se necesitan 24 triángulos.
Por lo tanto, el área de la estrella se calcula como:

$$\frac{36 \cdot 12}{24} = 18\,\mathrm{cm}^2.$$

Conclusión: El área de la estrella es $18\,\mathrm{cm}^2$.